NUMEROS RACIONALES

National Council of Teachers of Mathematics

Trillas

TEMAS DE MATEMATICAS

6. NUMEROS RACIONALES

El contenido de este cuaderno es una introducción clara y sencilla al estudio de los números racionales, los que define de varias formas. Además estudia algunas de sus propiedades, establece la relación entre los números racionales y los números enteros y define también las operaciones fundamentales, con números racionales.

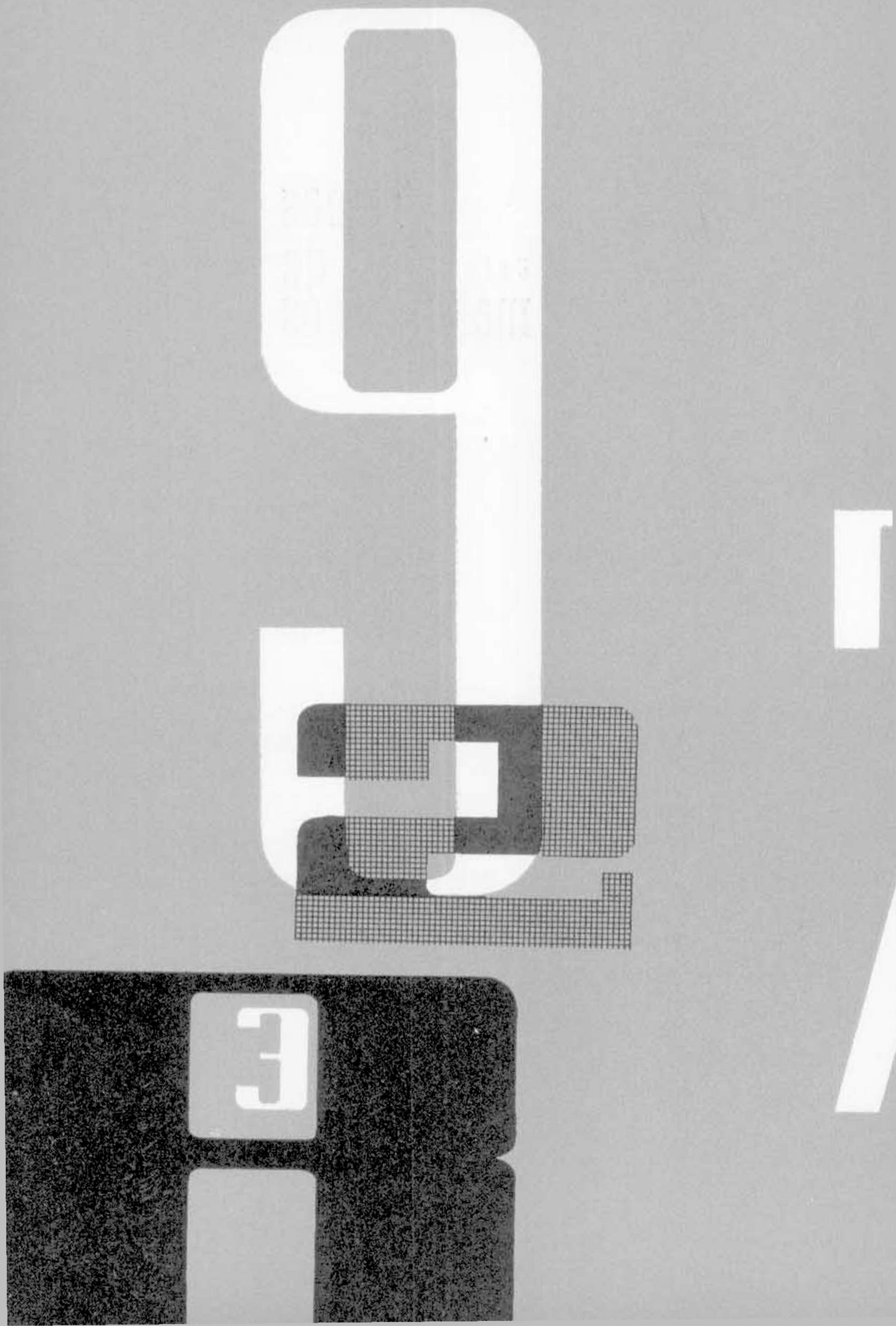
Particularmente estudia las propiedades de dichas operaciones y las compara con las propiedades de las operaciones fundamentales con números enteros.

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje transmitidas a los niños del ciclo elemental deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática tratados en cada uno de estos cuadernos.

Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en

Temas
Colección de
matemáticas



6

Números racionales

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1968

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 6. The Rational Numbers

Tercera reimpresión en inglés: 1965

Primera edición en español: 1968

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para los alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que suele enseñarse en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente convenientes, para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños en los primeros años de la escuela, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han observado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son los siguientes:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (*Proposiciones numéricas*) que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group), cuyos nombres se indican en la lista inscrita al final del prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Indice

Números racionales

Cuaderno 6

Introducción

La primera sección del *Papiro de Rhind,* tratado egipcio de matemáticas que data, aproximadamente, del año 1700 a. C., contiene una tabla de cocientes que se obtienen cuando se divide 2 entre un número impar mayor que 1, y menor que 103. Este tipo de cocientes se expresan actualmente por medio de fracciones como $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots$; pero los egipcios evidentemente sólo tenían símbolos para fracciones unitarias tales como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ $\left(\text{la única excepción fue } \frac{2}{3}\right)$. A pesar de eso, estaban bastante familiarizados con el concepto de un numeral que simboliza una parte de un entero y podían emplear su complicado simbolismo para resolver algunos problemas relativamente complejos. Imagínese la necesidad de tener que representar $\frac{47}{60}$ por

o por

En cada caso, esto equivale a la suma de fracciones $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$—todo esto *antes de empezar los cálculos* que implican cuarenta y siete partes de un total de sesenta.

En los 3 600 años siguientes, el hombre desarrolló medios distintos y más eficientes para expresar números que simbolicen partes de un entero, capacitándose, además, para adaptar estos números a sistemas amplios y más versátiles, y para verlos como casos especiales de números que se conducen de acuerdo con unas cuantas leyes poderosas.

Los números que se simbolizan por fracciones tales como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ó $\frac{47}{60}$ se llaman *números racionales*. Es nuestro propósito desarrollar en este cuaderno una idea de lo que son estos números y determinar formas alternativas de representarlos, y ver lo que podemos hacer con ellos. Aunque hay números racionales negativos, así como hay enteros negativos, aquí consideraremos únicamente los positivos.

Regiones congruentes

Una vía de acceso a la noción de número racional la encontraremos estimando las regiones congruentes en el plano. Estas regiones son tales que, al trazar el contorno de una cualquiera de ellas, se puede adaptar perfectamente al contorno de la otra. Las regiones pueden ser, por ejemplo, subregiones de una región dada, como las ilustradas en la figura 1.

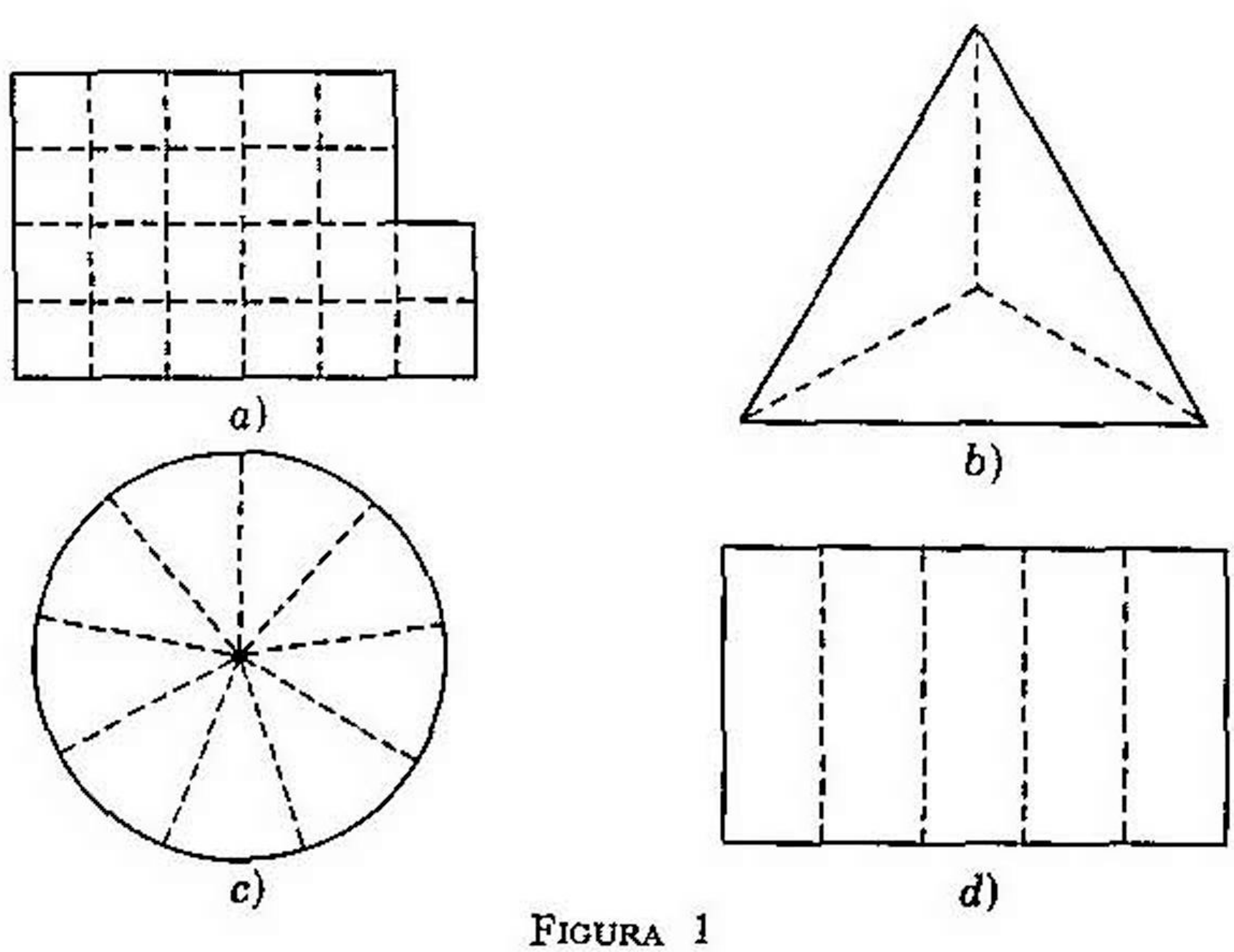
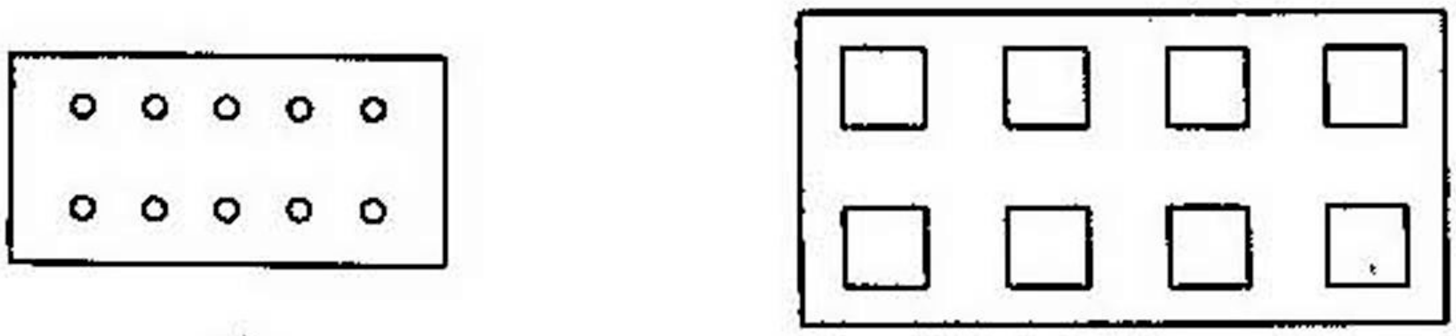


FIGURA 1

También pueden ser regiones discretas (separadas) como las circulares o las cuadradas que aparecen en la figura 2.



e) *f*)

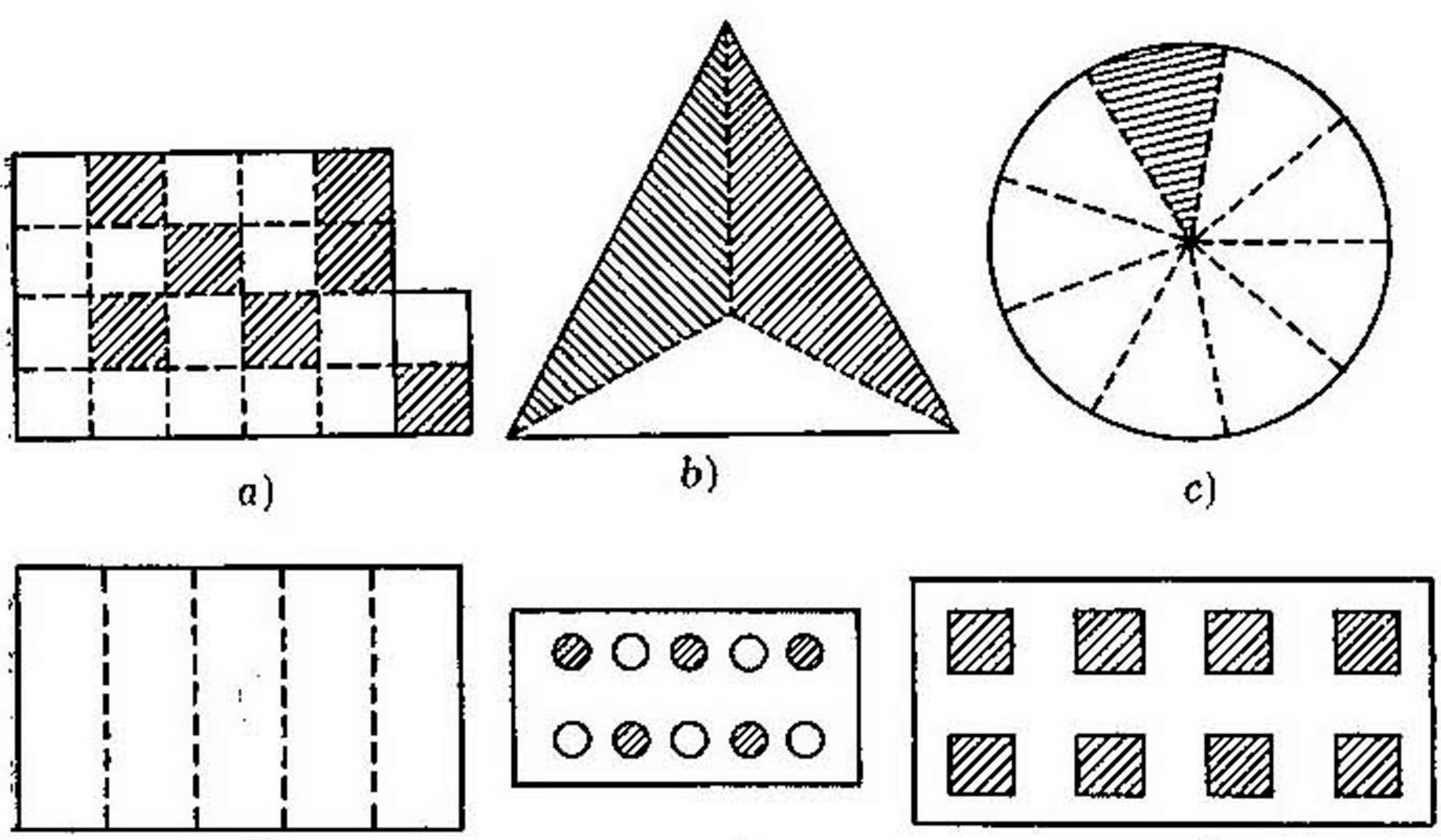
FIGURA 2

Contemos ahora las regiones congruentes en cada uno de los seis ejemplos de conjuntos de regiones congruentes que se muestran en las figuras 1 y 2. El número de regiones congruentes, de cada conjunto, se da en la anotación respectiva del cuadro I.

CUADRO I

Figura	1 *a*)	1 *b*)	1 *c*)	1 *d*)	2 *a*)	2 *b*)
Número total de regiones congruentes	22	3	9	5	10	8

Después escojamos algunas de estas regiones congruentes en cada conjunto, indicando mediante un rayado, las regiones escogidas, como se observa en la figura 3.



a) *b*) *c*) *d*) *e*) *f*)

FIGURA 3

En el cuadro I registramos el número de regiones congruentes en las ilustraciones sucesivas. Ahora registremos también el número correspondiente a las regiones escogidas (rayadas), como se indica en el cuadro II.

Si asociamos el número de regiones escogidas con el correspondiente número total de regiones congruentes, escribiendo el resultado en esta forma:

$$(7, 22), \quad (2, 3), \quad (1, 9), \quad (0, 5), \quad (5, 10), \quad (8, 8),$$

CUADRO II

Figura 3	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Número de regiones congruentes rayadas	7	2	1	0	5	8
Número total de regiones congruentes	22	3	9	5	10	8

o en esta forma:

$$\frac{7}{22}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{0}{5}, \quad \frac{5}{10}, \quad \frac{8}{8},$$

daremos entonces el primer paso hacia la comprensión de lo que es un número racional.

Observe que en la primera forma (forma de par ordenado) el número de regiones escogidas se escribe en *primer lugar*, y el número total de regiones se escribe en *segundo lugar*. En la segunda forma (forma fraccionaria), el número de regiones escogidas se escribe *arriba* de la raya, y el número total se escribe *abajo* de la raya. Ambas formas son útiles para el mismo propósito: indicar cuál es el número de regiones escogidas y cuál es el total de regiones.

Note también que en uno de los ejemplos anteriores que es (0, 5) ó $\frac{0}{5}$, no hemos escogido *ninguna* de las cinco regiones congruentes. Físicamente, esta clase de situaciones tiene un profundo significado. Por otra parte, 0 nunca aparece como segunda anotación; nunca consideramos un conjunto dado de regiones congruentes que conste de *ninguna* región congruente, ya que entonces el único número posible de regiones congruentes que podríamos escoger sería 0, situación difícil e interesante.

Para repasar todo lo que hemos visto, podemos escribir en forma de par ordenado y también en forma fraccionaria el resultado que se obtenga al escoger las regiones no rayadas en lugar de las regiones rayadas en la figura 3, y también pueden construirse otros conjuntos de regiones congruentes de diferentes formas.

Figuras unitarias

Puede notarse, observando los pares de números obtenidos en el cuadro II:

(7, 22), (2, 3), (1, 9), (0, 5), (5, 10), (8, 8),

que el primer número del par nunca es más grande que el segundo. ¿Cómo podríamos escoger más regiones que todas las regiones congruentes del conjunto?

Ampliemos un poco nuestras nociones para contestar esta pregunta, considerando varias reproducciones —o un número indefinido de reproducciones— de cualquiera de nuestros conjuntos de regiones congruentes, como se indica en la figura 4. Cada reproducción es una copia exacta de cualquier otra reproducción. Cuando consideramos tal conjunto de reproducciones, llamamos a cada producción, una *figura unitaria.*

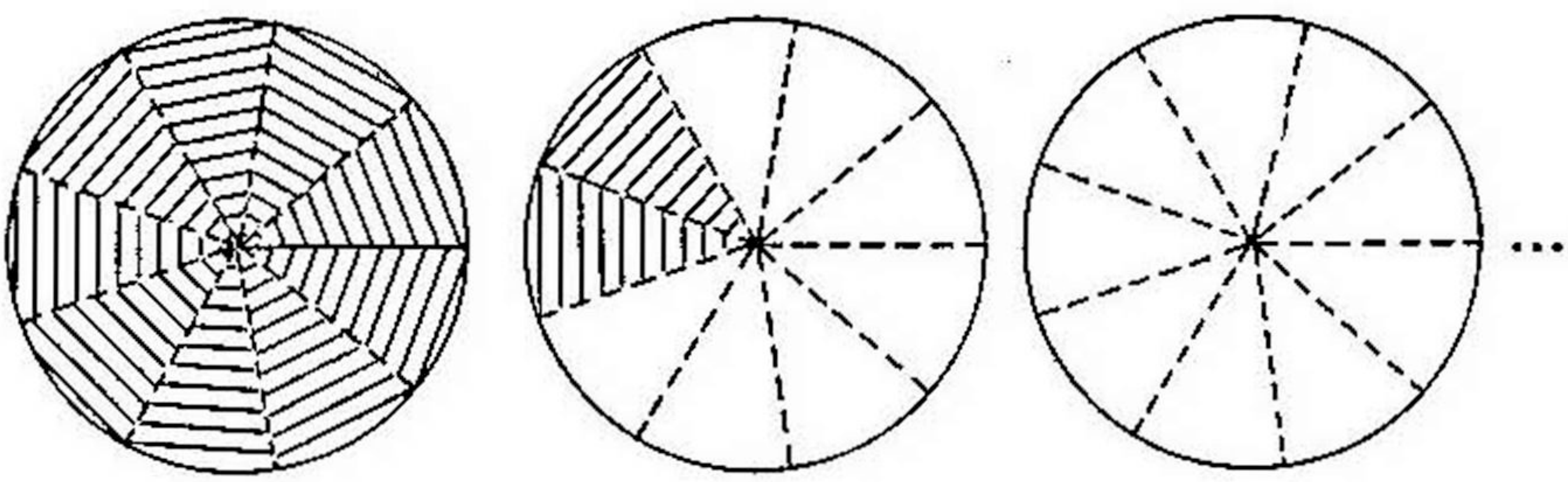


FIGURA 4

No nos interesan ya las figuras unitarias que tengamos; en general hemos de considerar que tenemos un número indefinido de figuras unitarias. Más bien, nos interesan, como antes, en primer lugar el *número de regiones congruentes en que se dividió la figura unitaria,* y en segundo lugar, *el número total de regiones congruentes que se escogieron de todas las figuras unitarias.*

Entonces, en la figura 4 hay 9 regiones congruentes en cada figura unitaria, y se han escogido 11 regiones congruentes en total (rayadas); para simbolizar esto escribimos (11, 9) u $\frac{11}{9}$.

Podemos interpretar la figura 4, por ejemplo, en términos de un equipo de beisbol (que consta de 9 jugadores efectivos, más un lanzador extra y un jugador de reserva) identificando las regiones congruentes con los jugadores e identificando a la figura unitaria con el conjunto de jugadores del equipo, que están tomando parte activa en el juego de determinado momento.

Representación lineal

Para uniformidad, usaremos en lo sucesivo sólo cuadrados congruentes como figuras unitarias y los dividiremos mediante segmentos de recta verticales, representados por rayas, para indicar las regiones congruentes en que se ha dividido el cuadrado. Por tanto, en la figura 5, se han dividido las sucesivas figuras unitarias congruentes a partir de la segunda, en dos, tres y cuatro regiones, también por una, dos y tres líneas interrumpidas, respectivamente.

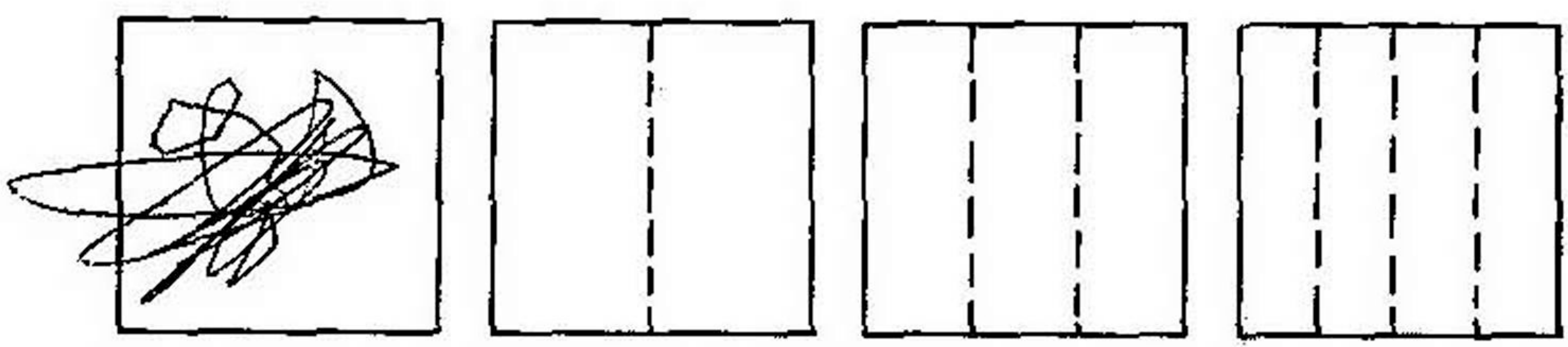


FIGURA 5

Además, partiendo de una figura unitaria original, podemos agregar a la derecha de ella varias figuras unitarias como vemos en la figura 6. Aquí, a modo de ejemplo, cada figura unitaria se ha dividido en tres regiones congruentes.

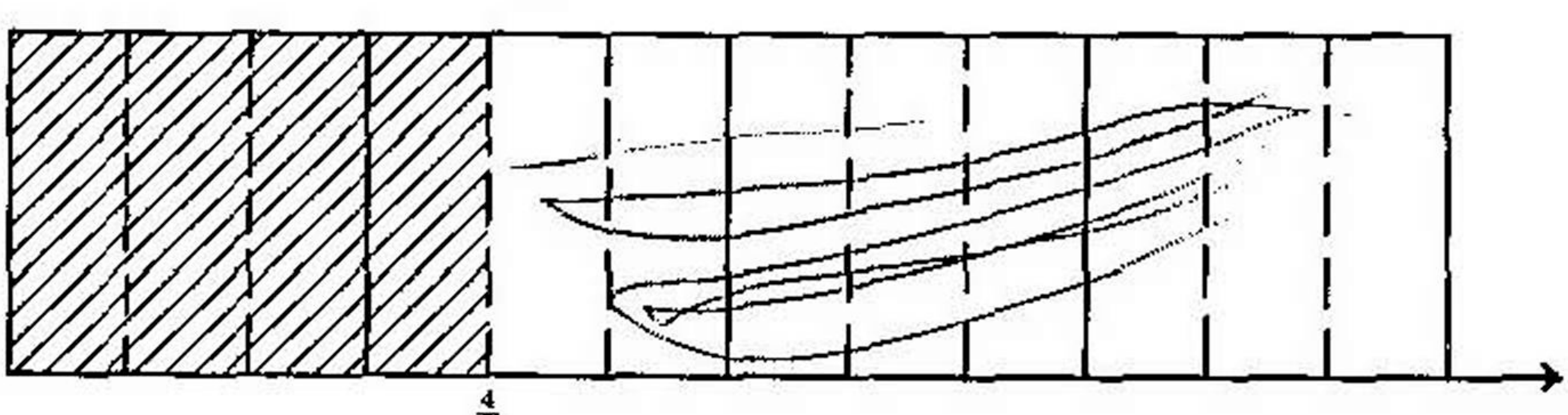


FIGURA 6

También acordaremos que las regiones congruentes que se escojan (rayadas) se tomarán consecutivamente a partir de la extrema izquierda e indicaremos en forma fraccionaria el número de regiones escogidas, anotando la fracción en la esquina inferior derecha de la última región escogida.

Sin embargo, no es necesario que se tenga la anotación de regiones congruentes de la izquierda para poder indicar las anotaciones posteriores. En la figura 7 se han indicado las regiones congruentes escogidas de cuatro figuras unitarias, cada una de éstas con tres regiones congruentes.

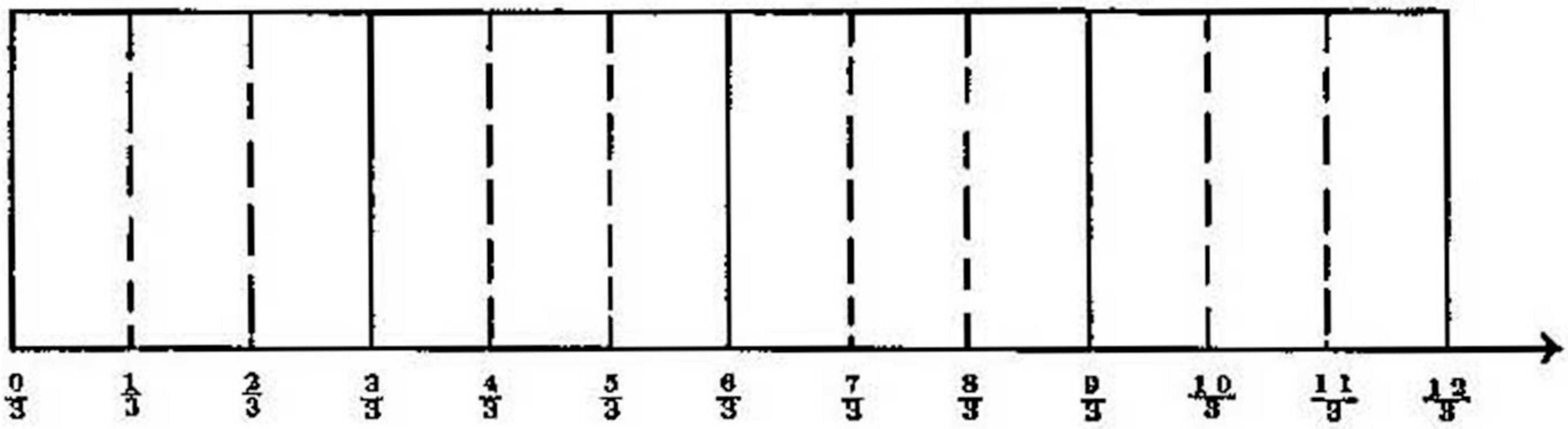


FIGURA 7

Si estamos familiarizados con el eje numérico, podremos reconocer a ¡un viejo amigo! Si no estamos familiarizados con dicho eje, o aunque lo estemos, quizá queramos en este punto leer en el cuaderno 1, *Conjuntos,* y del cuaderno 2, *Números enteros,* lo referente al eje numérico.

Consideremos ahora, como un detalle más para adiestrarnos en el problema de escoger regiones congruentes, el caso en el que cada figura unitaria se ha subdividido en diferentes números de regiones congruentes. Por ejemplo, en la figura 8, la figura unitaria se ha subdividido en dos regiones congruentes mediante la línea de rayas más largas, y en tres regiones congruentes mediante las líneas de rayas más cortas. Esto se ilustra también en la figura 9, con figuras unitarias rectangulares, cada cual con una, dos, tres y cuatro regiones congruentes.

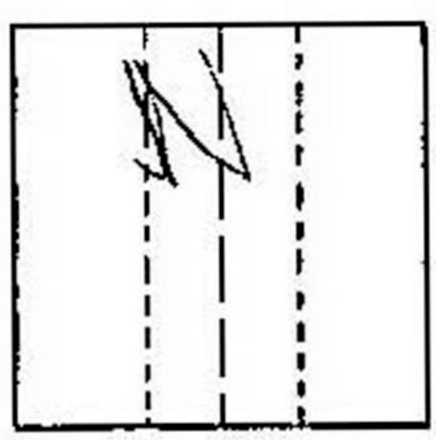


FIGURA 8

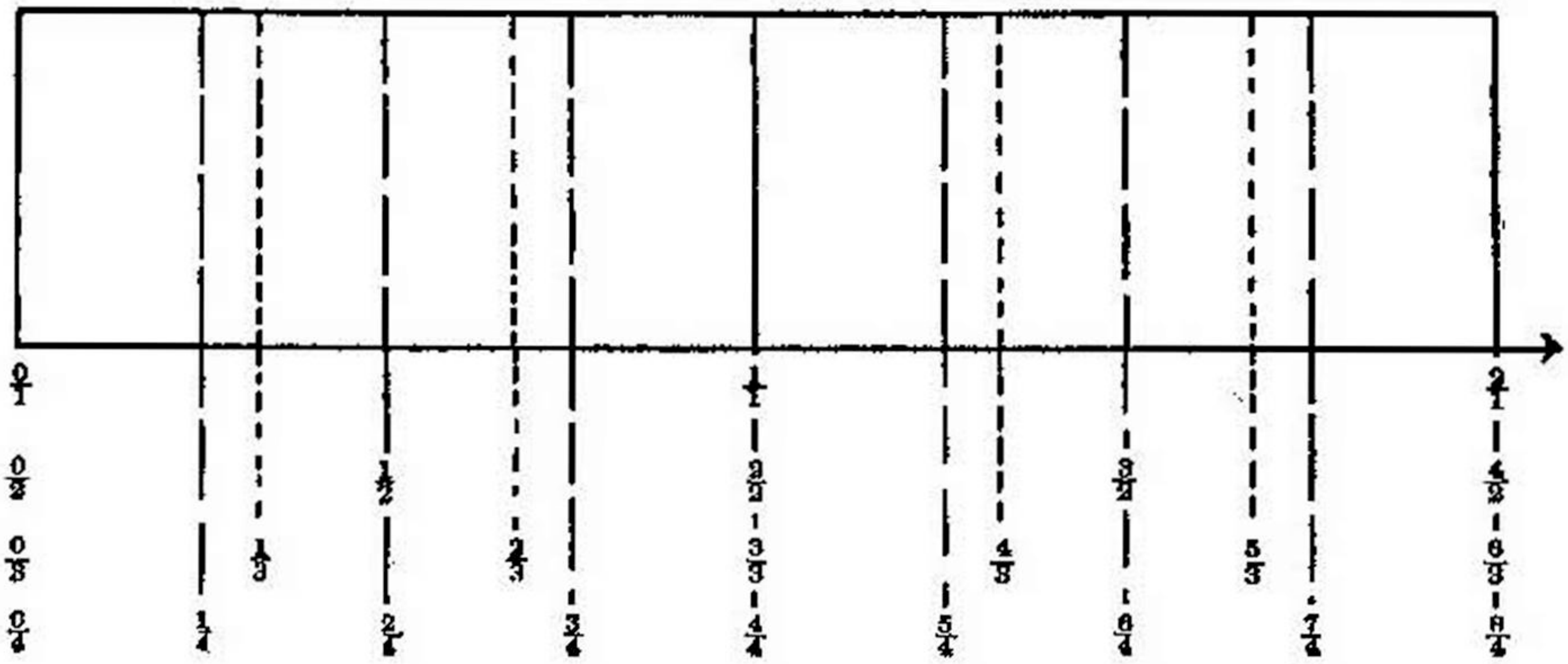


FIGURA 9

Para simplificar nuestra discusión, atendamos la línea base común a todas las figuras unitarias y consideremos segmentos de recta congruentes en lugar de regiones congruentes, como se muestra en la figura 10.

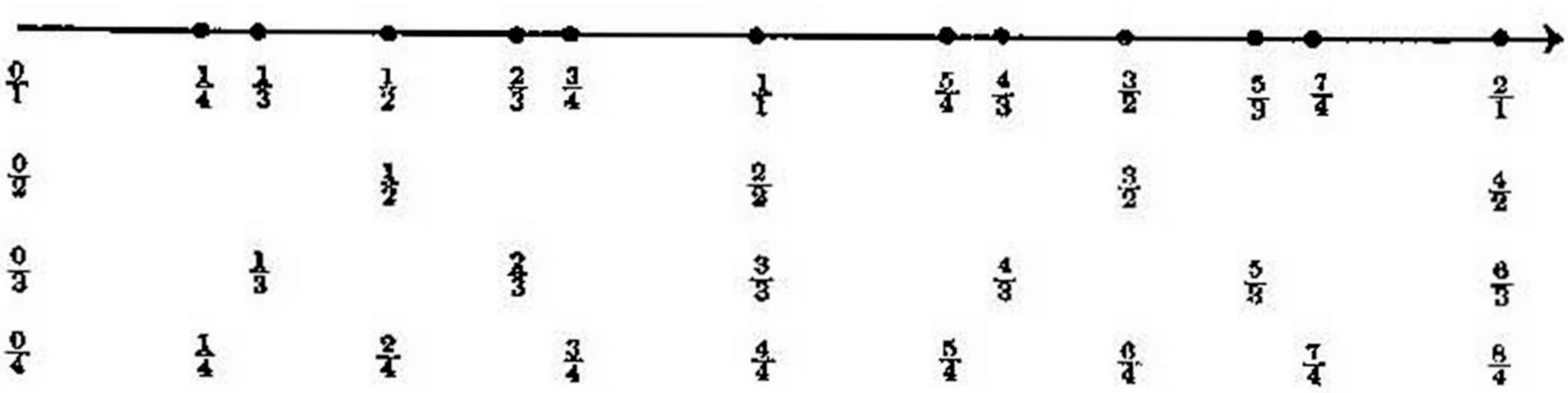
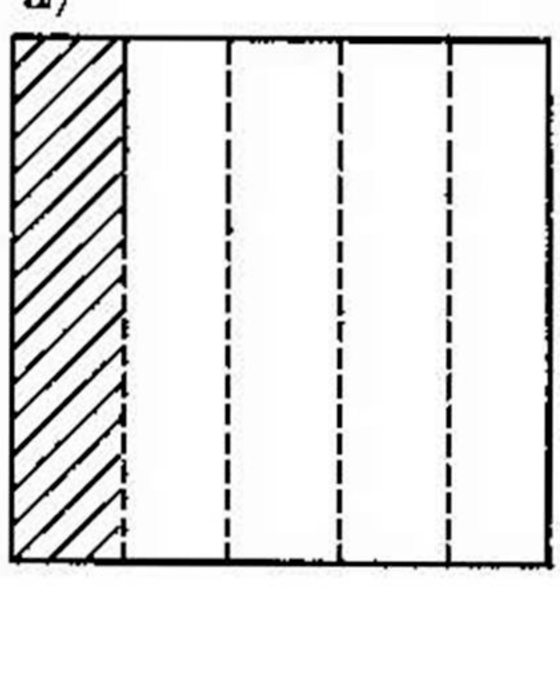


FIGURA 10

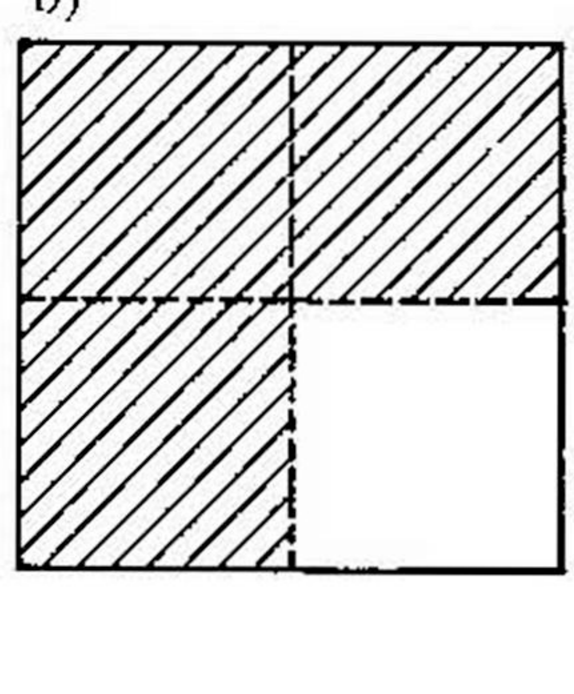
Grupo de ejercicios 1

1. ¿Qué par ordenado de números se debe asociar a la parte rayada en cada una de las siguientes figuras unitarias?

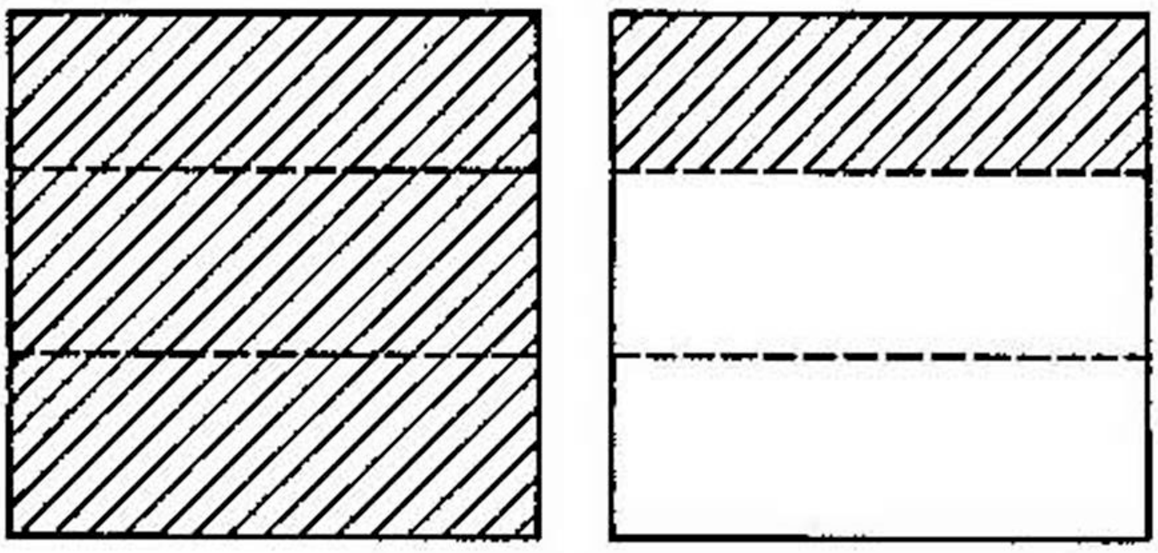
a)



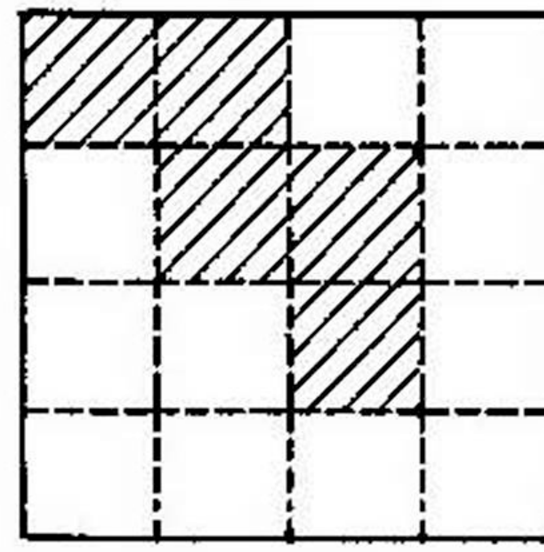
b)



c)



d)

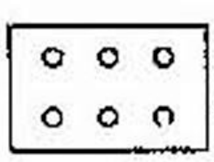


2. ¿Qué par ordenado de números se debe asociar a la región no rayada en cada una de las figuras unitarias del ejercicio 1?

3. *a*) ¿Qué significa la expresión $\frac{0}{7}$ cuando se asocia a un punto en el eje numérico?

   b) ¿Qué significa la expresión $\frac{5}{9}$ en términos de regiones congruentes?

   c) ¿Por qué es imposible hablar de $\frac{8}{0}$ como una expresión relacionada con los conjuntos de objetos discretos?

4. Empleando , como figura unitaria, que contiene seis objetos discretos, represente mediante dibujos, $\frac{15}{6}, \frac{8}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}$.

5. Escriba las fracciones correspondientes a todos los puntos indicados en los ejes numéricos de la figura 11.

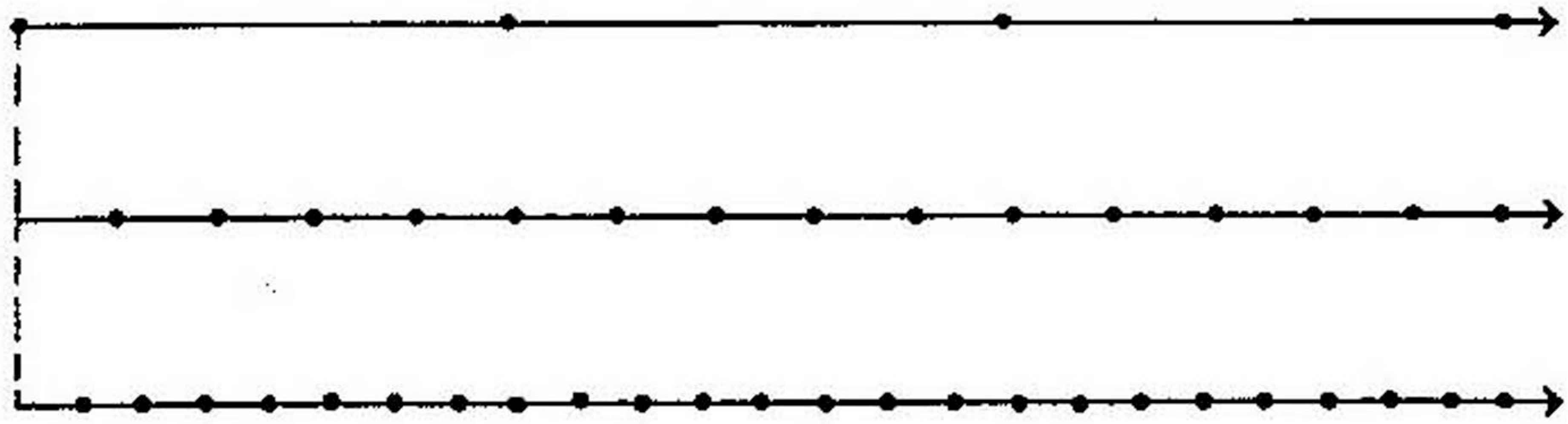


FIGURA 11

Números racionales

Suponga que un niño tiene un conjunto de cubos, como los de la figura 12. Si se le pregunta cuántos cubos hay en el conjunto, posiblemente conteste: "Tres". En este caso, ya empieza a familiarizarse con el concepto abstracto de *número natural* (número que empleamos para *contar*).

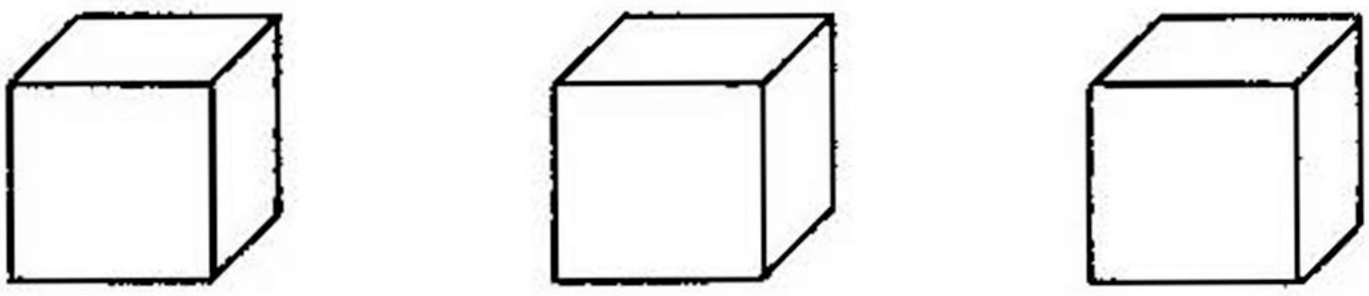


FIGURA 12

De igual modo podría preguntársele, cuando alcance un mayor desarrollo mental, qué *número racional* está representando en la figura 13. Sin embargo, para evitar la posibilidad de que interprete mal el problema, debe estar completamente claro qué objetos (que corresponden a las regiones congruentes que hemos estado discutiendo) se están considerando y cuántos

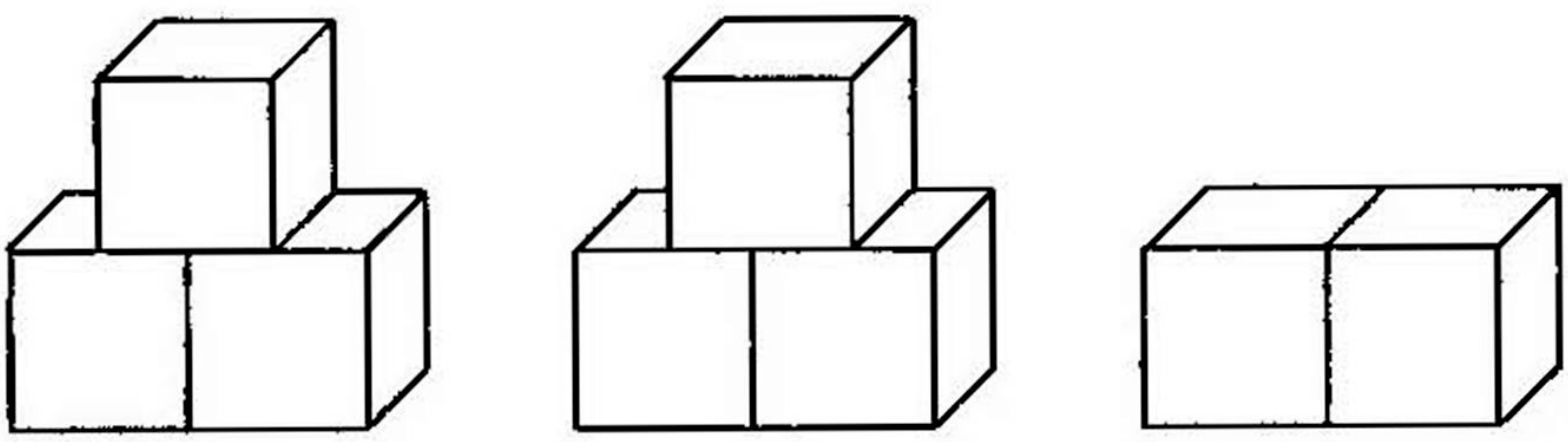


FIGURA 13

de estos objetos se toman para que constituyan una figura unitaria. En este ejemplo, los objetos son cubos y la figura unitaria está formada por tres cubos. Conviniendo que la figura unitaria la forman tres cubos, el niño contestará: "Ocho tercios."

Entonces, los números racionales son ideas matemáticas abstractas, igual que los números naturales y pueden ponerse en correspondencia con puntos del eje numérico, según se ilustra en la figura 10. Además, podemos simbolizar los números racionales con fracciones, que son *numerales* (nombres de los números).

Si dividimos luego en el eje numérico cada figura unitaria —que, en el caso, debe llamarse *intervalo unitario*— en igual número, digamos 10 de regiones o (subintervalos) congruentes, y tomamos cierto número de éstas (23, por ejemplo), a partir de la extrema izquierda, encontramos que al punto extremo de la derecha del último subintervalo le corresponde un número racional, que representamos mediante una fracción $\left(\frac{23}{10}\right.$ en nuestro ejemplo$\left.\right)$.

Hemos señalado el número 23 como ejemplo y lo llamamos *numerador* de la fracción porque expresa el número de subintervalos tomados. El 10 se llama *denominador* porque expresa el número de subintervalos congruentes en los que se dividió el intervalo unitario.

Una regla de veinte pulgadas puede marcarse de modo que sirva para medir en fracciones aproximadas que tengan como denominador 1, 2, 4, 8 y 16. No contamos estos conjuntos de marcas cada vez que empleamos la regla porque estamos familiarizados con ellos. Por otra parte, el numerador, varía de medida a medida y ordinariamente se determina contando. En el sistema métrico, desde luego, los denominadores pueden ser 1, 10 y 100.

Es muy importante insistir en que, aunque es perfectamente válido que el numerador de una fracción sea 0, el denominador nunca puede ser 0.

Para familiarizarse con todas estas nociones deben construirse varios ejes numéricos, de manera que se tengan diferentes denominadores y, en cada uno de ellos, localizar y asignar el símbolo adecuado a los puntos que correspondan a números racionales.

Diferentes fracciones para el mismo número racional

En el eje numérico de la figura 9, así como en la figura 10, el punto que marca el extremo derecho de la primera figura unitaria —o segmento unitario— se representó con numerales diferentes: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, y $\frac{4}{4}$. Por tanto:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4},$$

con esto indicamos que todas estas fracciones representan el *mismo* número racional. De igual manera:

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=\frac{0}{4},$$

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4},$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4},\quad \frac{3}{2}=\frac{6}{4},$$

y así, sucesivamente.

De lo anterior, con facilidad puede darse una regla y también puede entenderse con igual facilidad. Sabemos que:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

porque en la segunda expresión, $\frac{2}{6}$, hemos dividido en dos, todos los subintervalos del intervalo unitario; esto es, hemos duplicado el número de subintervalos, que corresponden a la expresión $\frac{1}{3}$, pero también hemos tomado lo doble de subintervalos, que tomamos en $\frac{1}{3}$.

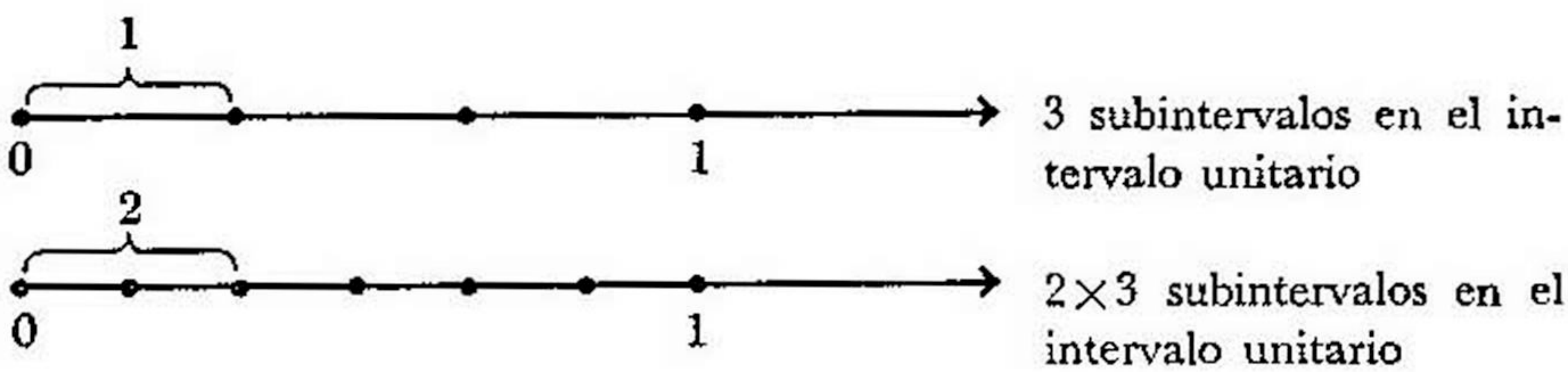


FIGURA 14

Si se multiplica tanto el numerador como el denominador de una fracción dada, por un mismo número natural (excepto cero) la fracción resultante representa el mismo número racional que simboliza la fracción dada.

Para comprender mejor la regla anterior, tome en un eje numérico los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{9},\qquad \frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\frac{18}{15},\qquad \text{etc.}$$

Si invertimos esta regla, tenemos

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

puesto que en la segunda expresión $\frac{2}{3}$, el número de subintervalos en que hemos dividido el intervalo unitario es la cuarta parte del número de subintervalos de la primera expresión $\frac{8}{12}$; pero también el número de subintervalos tomado en la segunda expresión es la cuarta parte del número de subintervalos tomados en la primera. Porque en la segunda expresión convertimos cuatro subintervalos de la primera, en uno mayor; pero también tomamos de estos subintervalos mayores la cuarta parte respecto de los que tomamos en la primera expresión.

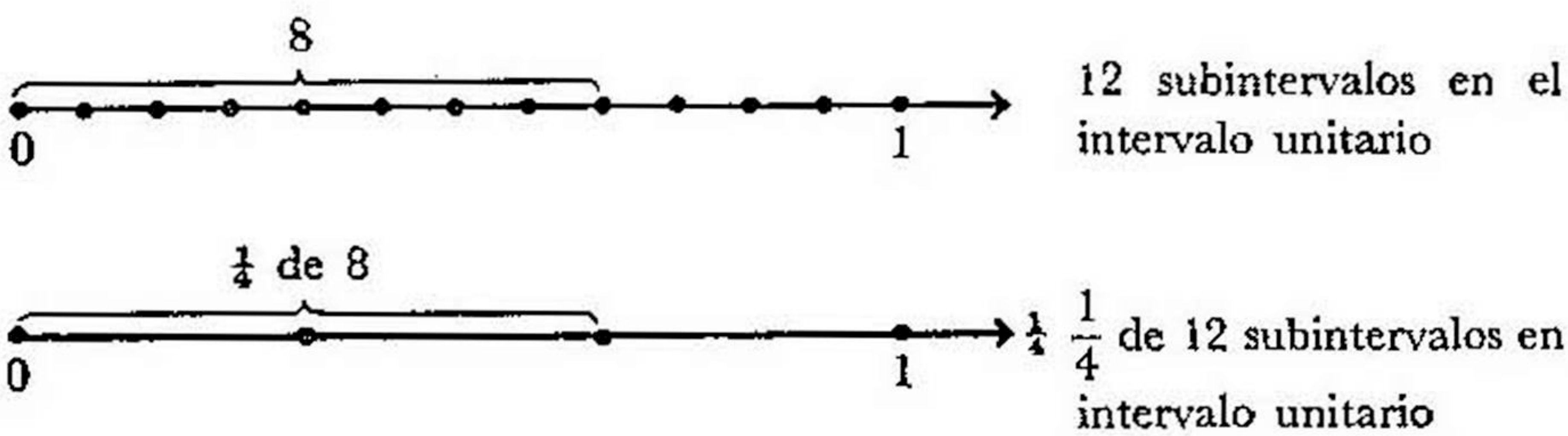


Figura 15

Se debe tener en cuenta la siguiente precaución para invertir la regla. Se recordará que siempre dividimos nuestros intervalos unitarios en un número natural de subintervalos y se tomará únicamente un número entero de éstos. La fracción $\frac{8}{12}$, por ejemplo, indica que hemos dividido el intervalo unitario en 12 subintervalos congruentes y que, además, sólo hemos tomado 8 de éstos. Para tener otra representación del mismo número, no podríamos, por ejemplo, agrupar los 12 intervalos congruentes en conjuntos de 5 cada uno, porque el intervalo unitario no quedaría dividido en subintervalos congruentes, puesto que 5 no es factor de 12 (ver la figura 16*a*). Por otra parte, podríamos combinar los subintervalos en conjuntos de 3 cada uno, puesto que 3 es factor de 12; pero entonces no tomaríamos un número entero de éstos porque 3 no es factor de 8 (ver la figura 16*b*). Podemos, sin embargo, agrupar los subintervalos en conjuntos de 4 cada uno, puesto que 4 es factor de 12 y 8 (ver la figura 16*c*).

Conviene, en relación al tema, revisar los conceptos de factores y múltiplos, factores comunes y múltiplos comunes, máximo común divisor y

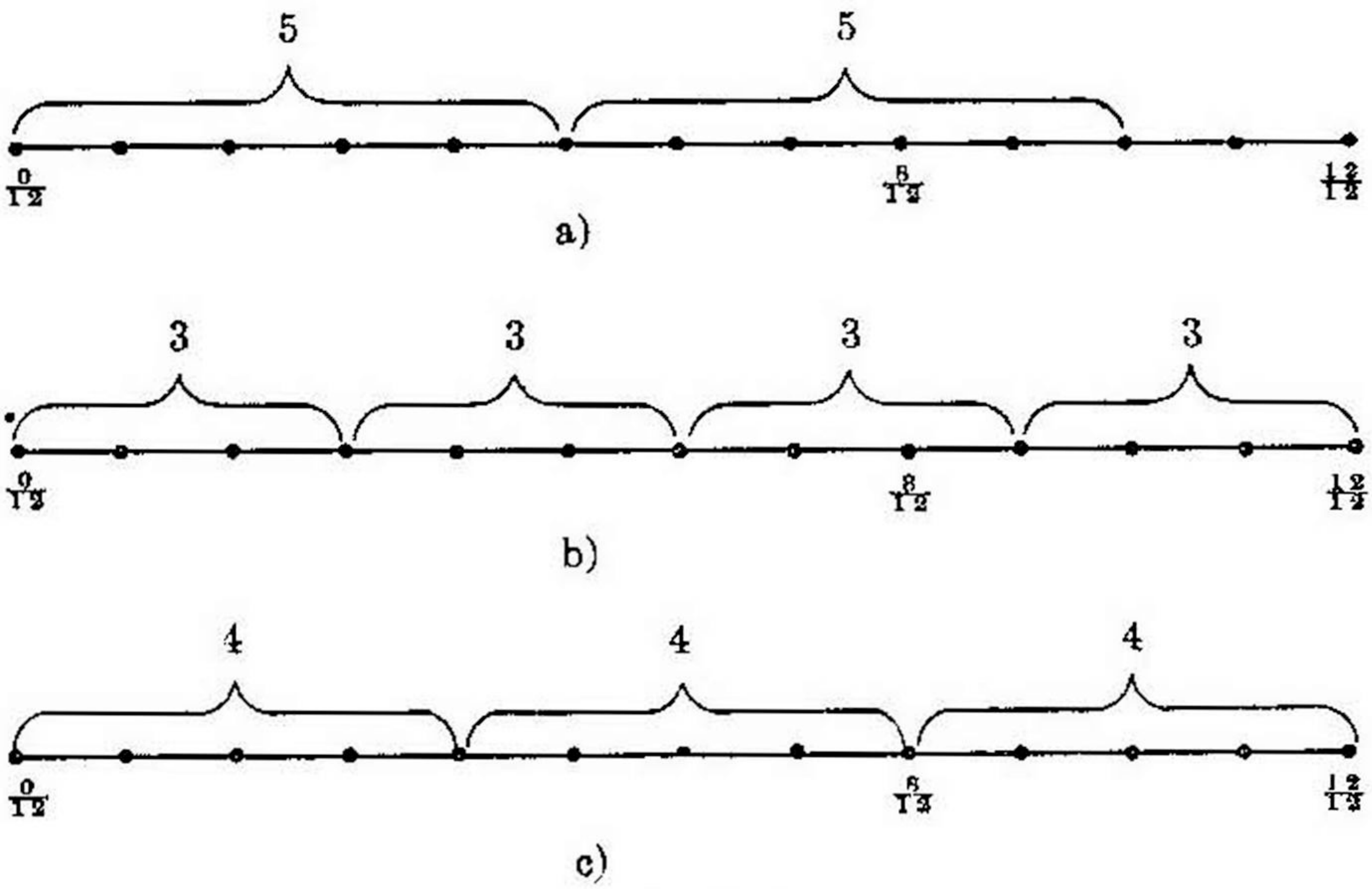


FIGURA 16

mínimo común múltiplo, ya tratados en el cuaderno 5: *Números y sus factores.*

Con esto ilustramos la regla siguiente:

> *Si tanto el numerador como el denominador de una fracción dada, se dividen entre un mismo número (un factor común del numerador y del denominador), entonces la fracción resultante representa el mismo número que la fracción dada.*

En particular si el numerador y el denominador de una fracción dada, que representa un número racional, se divide entre su máximo común divisor, entonces el número racional queda expresado en su *forma fraccionaria* más simple.

Por ejemplo, obtener la fracción más simple que represente el número racional expresado por $\frac{36}{48}$. Descomponiendo 36 y 48 como productos de factores primos tenemos,

$$36 = 2\times2\times3\times3,$$
$$48 = 2\times2\times2\times2\times3.$$

Observe que el máximo común divisor es

$$2\times2\times3 = 12$$

dividiendo 36 y 48 entre 12 tenemos

$$\frac{36}{48}=\frac{3}{4}$$

de acuerdo con esto, la fracción más simple que representa a dicho número racional es $\frac{3}{4}$.

Grupo de ejercicios 2

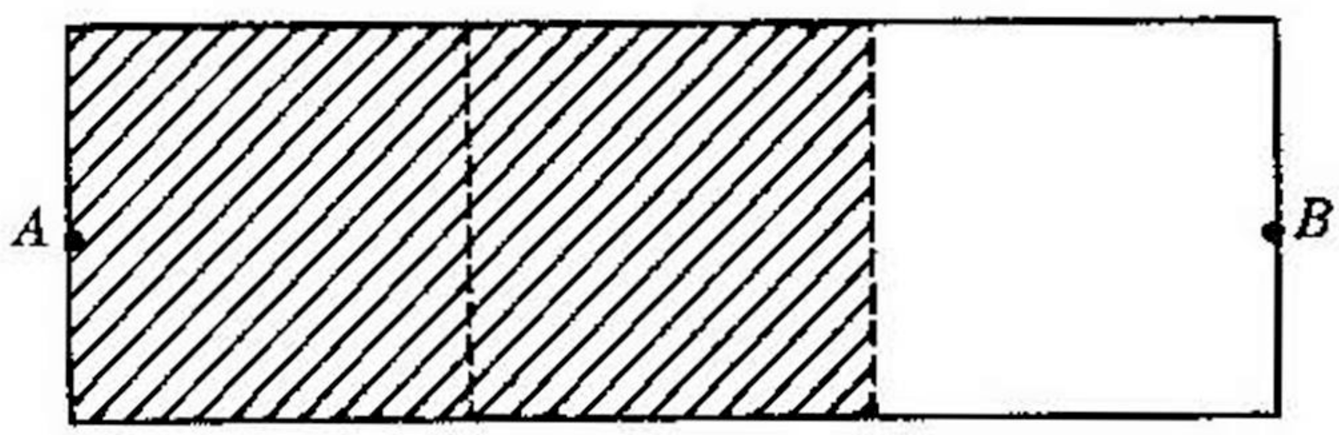


FIGURA 17

1. ¿Qué fracción puede asociarse con la parte rayada de la región unitaria de la figura 17?

2. Dibuje un línea punteada de A hasta B (figura 17). ¿Qué fracción se asocia con la parte rayada de la región unitaria?

3. *a*) Después de dibujar la línea punteada de A hasta B ¿en cuántas regiones congruentes se ha dividido cada subintervalo de la región unitaria?
   b) ¿Es 2 un factor común del numerador y del denominador de la fracción $\frac{4}{6}$?
   c) ¿Cuándo se dividen entre 2 tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{4}{6}$, la fracción resultante simboliza el mismo número racional que simboliza la fracción $\frac{4}{6}$?

4. *a*) Descomponga 35 como producto de factores primos.
   b) Descomponga 49 como producto de factores primos.
   c) ¿Cuál es el máximo común divisor de 35 y 49?

d) Obtenga la fracción más simple para el número racional simbolizado por $\frac{35}{49}$.

5. Demuestre que $\frac{12}{52}=\frac{30}{130}$, encontrando la fracción más simple que represente a cada uno de estos números racionales.

Denominadores iguales

Muchas veces cuando trabajamos con fracciones que simbolizan números racionales, conviene que todas las fracciones empleadas tengan el mismo denominador. ¿Siempre es posible esto?

FIGURA 18

Considere, por ejemplo, los números racionales simbolizados por $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$. Su representación en el eje numérico se da en la figura 18. Geométricamente el problema es: ¿Podemos dividir el intervalo unitario en regiones congruentes, de tal manera que un punto de la división quede sobre el punto que corresponde a $\frac{1}{4}$ y que, además, otro de los puntos de esta división, quede sobre el punto que corresponde a $\frac{2}{3}$?

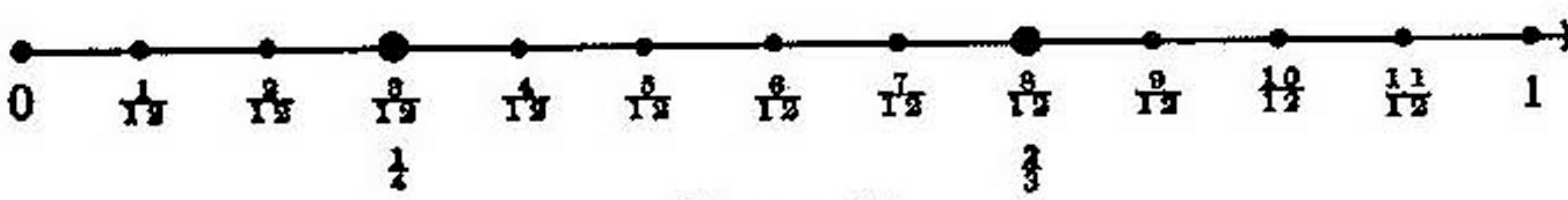


FIGURA 19

Una forma en la que, con seguridad, se puede hacer esto es dividir el intervalo en $4\times3=12$ subintervalos congruentes, como se muestra en la figura 19; porque 4 es factor de 4×3, así como 3 es factor de 4×3. Entonces tenemos

$$\frac{1}{4}=\frac{3}{12} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3}=\frac{8}{12}.$$

Entonces los dos números racionales, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$, se expresan en forma tal que las fracciones resultantes tienen como denominador común, 12. Nótese que 12 es exactamente el mínimo común múltiplo * de 3 y 4.

Si se quiere expresar $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ mediante fracciones que tengan el mismo denominador, debe obtenerse un múltiplo común (el más conveniente es el mínimo común múltiplo) de 3, 4 y 5. Sabemos que el mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12, entonces debemos encontrar el mínimo común múltiplo de 12 y 5. Puesto que 5 es primo, el mínimo común múltiplo es 12×5, o sea 60, y escribimos

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 15}{4 \times 15} = \frac{15}{60},$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 20}{3 \times 20} = \frac{40}{60},$$
$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 12}{5 \times 12} = \frac{36}{60}.$$

Fracciones equivalentes

Hemos visto que un número racional puede expresarse mediante muchas fracciones. De hecho, todo número racional puede expresarse mediante un número infinito de fracciones; por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{5 \times 3}{5 \times 4} = \ldots .$$

De esto se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos saber si dos fracciones representan un mismo número racional?

Hay un punto en el eje numérico asociado con cada una de las dos fracciones. Este punto corresponde a un número. Si uno y el mismo punto corresponde a ambas fracciones, entonces las dos fracciones expresan el mismo número.

Supongamos, por ejemplo, que queremos determinar si

$$\frac{11}{52} \quad \text{y} \quad \frac{4}{17}$$

representan o no el mismo número racional.

Los números racionales expresados por las fracciones $\frac{11}{52}$ y $\frac{4}{17}$, pueden representarse mediante fracciones con igual denominador, y con esto se sim-

* Tratado en el cuaderno 5: *Números y sus factores.*

plifica la comparación de los números, con sólo ver los numeradores. El mínimo común múltiplo de 52 y 17 que es 52×17 puede emplearse como denominador común (de hecho, es el mínimo común denominador). Entonces tenemos:

$$\frac{11}{52} = \frac{17 \times 11}{17 \times 52} = \frac{187}{52 \times 17},$$

$$\frac{4}{17} = \frac{52 \times 4}{52 \times 17} = \frac{208}{52 \times 17}.$$

No es necesario efectuar la multiplicación indicada 52×17, porque en ambos denominadores señala que debemos dividir el intervalo unitario en el *mismo número* de subintervalos congruentes, cualquiera que éste sea. Observando los dos numeradores vemos que para localizar el punto correspondiente al segundo número racional, tienen que tomarse más subintervalos congruentes (208 con respecto a 187) que los que tienen que tomarse para encontrar el punto que corresponde al primero. Por tanto, los puntos no coinciden, y por esto no corresponden al mismo número racional.

Ahora comprobemos si

$$\frac{323}{133} \quad \text{y} \quad \frac{221}{91}$$

representen o no, el mismo número. Tenemos que:

$$\frac{323}{133} = \frac{91 \times 323}{91 \times 133} = \frac{29\,393}{91 \times 133},$$

$$\frac{221}{91} = \frac{133 \times 221}{133 \times 91} = \frac{29\,393}{91 \times 133},$$

Puesto que los numeradores y los denominadores, en este caso, son iguales; entonces estas dos fracciones representan el mismo número racional, esto es

$$\frac{323}{133} = \frac{221}{91}$$

dos fracciones que representan un mismo número racional, tales como $\frac{323}{133}$ y $\frac{221}{91}$, se llaman *equivalentes.*

Si el lector puede formular con sus propias palabras y entender una regla para comprobar si dos fracciones representan o no un mismo número racional, o sea, para determinar si dos fracciones son o no equivalentes, entonces probablemente haya dominado muy bien las explicaciones de esta sección.

Orden de los números racionales

En la sección anterior vimos que los números racionales expresados por $\frac{11}{52}$ y $\frac{4}{17}$ corresponden a puntos diferentes del eje numérico. En tal caso decimos que estos números *no son iguales* o que son *desiguales* y en símbolos expresamos lo anterior de la siguiente manera:

$$\frac{11}{52} \neq \frac{4}{17}.$$

Pero también observamos que

$$\frac{4}{17} = \frac{208}{52 \times 17},$$

y que

$$\frac{11}{52} = \frac{187}{52 \times 17},$$

entonces, es evidente que el punto que corresponde al número racional representado por $\frac{4}{17}$, se sitúa en el eje numérico más a la derecha del punto que corresponde al número racional representado por $\frac{11}{52}$. Por tanto, decimos que el primero de estos números es *mayor que* el segundo, o que el segundo es *menor que* el primero, y expresamos esto de la siguiente manera:

$$\frac{4}{17} > \frac{11}{52} \quad \text{ó} \quad \frac{11}{52} < \frac{4}{17}.$$

Observe que la fracción que expresa el número racional mayor, aparece en el lado de la abertura del signo de desigualdad, y que la fracción que expresa el número racional menor aparece en el vértice del signo de desigualdad. De la misma manera tenemos:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{7}{4} > \frac{3}{2}, \qquad \frac{1}{1} < \frac{1}{2}.$$

Hemos visto que cada número racional puede hacerse corresponder a un punto del eje numérico. Dados dos números racionales cualesquiera, sólo una de las tres posibilidades siguientes se cumple: el punto que corresponde al primero se localiza a la izquierda o a la derecha del punto que corresponde al segundo o coincide con éste. Entonces, para dos números racionales cualesquiera, tenemos que el primero es menor o igual que el segundo. Por esta razón decimos que el conjunto de los números racionales es *ordenado* o que hay una *relación de orden* entre pares de sus miembros.

Suponga que deseamos determinar la relación de orden que existe entre los números racionales representados por $\frac{4}{17}$ y $\frac{10}{52}$, cuando ya sabemos que $\frac{4}{17} > \frac{11}{52}$. ¿El primer número racional es menor, igual o mayor que el segundo? Una observación que fácilmente entendemos, considerando puntos correspondientes en el eje numérico: vimos en el ejemplo anterior que

$$\frac{4}{17} > \frac{11}{52},$$

y desde luego, tenemos que

$$\frac{11}{52} > \frac{10}{52},$$

puesto que los denominadores son iguales y respecto a los numeradores, $11 > 10$. Por tanto,

$$\frac{4}{17} > \frac{10}{52}.$$

La razón para concluir de este modo es que, puesto que el punto del eje numérico representa al primer número, que está a la derecha del punto que representa al segundo, y el segundo está a la derecha del tercero, entonces el primero tiene que estar a la derecha del tercero.

Podemos describir lo anterior diciendo que $>$ es una *relación transitiva*, esto es, si un primer número racional es mayor que un segundo número racional y el segundo es mayor que un tercer número racional, entonces el primero es mayor que el tercero. De manera semejante $<$ señala una relación transitiva.

Para un somero repaso de lo anterior, se emplea la noción de transitividad y las desigualdades anteriores para determinar la relación de orden que existe entre los números racionales representados por

$$\frac{5}{17} \quad \text{y} \quad \frac{9}{52},$$

Grupo de ejercicios 3

Determine la relación de orden que existe entre cada uno de los pares siguientes, multiplicando recíprocamente ambos términos de cada expresión (numerador y denominador) por el denominador de la otra expresión. El primer problema está resuelto para que sirva de guía.

1. $\frac{5}{17}$ y $\frac{9}{52}$

$$\frac{5}{17}=\frac{5\times 52}{17\times 52}=\frac{260}{17\times 52}$$

$$\frac{9}{52}=\frac{9\times 17}{52\times 17}=\frac{153}{52\times 17}$$

Puesto que $17\times 52=52\times 17$, no es necesario obtener el número al que representa este producto. La relación de orden que existe entre las dos fracciones puede determinarse comparando los numeradores de dichas fracciones, $\frac{260}{17\times 52}$ y $\frac{153}{52\times 17}$, puesto que 260 es mayor que 153, entonces, $\frac{5}{17} > \frac{9}{52}$.

2. $\frac{28}{3}$ y $\frac{30}{4}$

3. $\frac{17}{20}$ y $\frac{15}{19}$

4. $\frac{9}{13}$ y $\frac{8}{11}$

Números enteros y números racionales

Abajo del eje numérico, en la figura 10, exponemos ciertas fracciones que expresan números racionales y se representan como puntos sobre una línea. Llegamos a la noción de esos números racionales considerando primero cada figura unitaria como formada de cierto *número natural* de partes congruentes y después tomando un *número entero* de estas partes. Así *empleamos* la noción de *número natural* y la noción de *número entero* para deducir la noción de número racional.

A la extrema izquierda del eje numérico, en la figura 10, colocamos ahora el símbolo 0 para expresar el número 0, y marcamos además los numerales de los números naturales, 1, 2, 3, . . ., contando intervalos unitarios sucesivos como se indica en la figura 20.

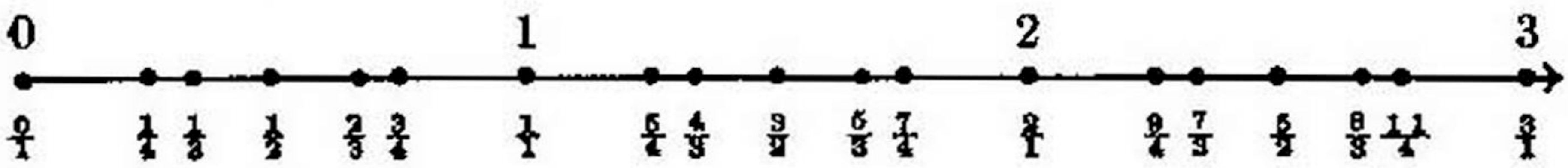


FIGURA 20

Lo anterior nos sugiere una *correspondencia* útil entre los números enteros y algunos números racionales como vemos en la misma figura 20. La correspondencia se indica en el cuadro III. A cada número entero le corresponde exactamente un número racional (desde luego, cada número puede representarse de muchas formas), además, a cada número racional del conjunto $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right\}$ le corresponde exactamente un número entero. Por esta razón, decimos, que la correspondencia es una correspondencia biunívoca.

CUADRO III

Representación como número entero	0	1	2	3	...
Representación como número racional	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	...

Más aún, esta identificación se mantiene coherente en las relaciones entre los elementos del conjunto de los números enteros por un lado, y los elementos del conjunto $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots\right\}$ por otro, y con las operaciones que ejecutamos con ellos. De este modo, por ejemplo, en el sistema numérico de los enteros tenemos que

$$1<3,$$

y en el sistema numérico de los racionales tenemos que

$$\frac{1}{1}<\frac{3}{1},$$

que concuerda con la correspondencia indicada en el cuadro III. Además, en el sistema numérico de los enteros, tenemos

$$1+2=3,$$

y en cuanto al sistema numérico de los racionales, más adelante definiremos la adición, de tal manera que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}=\frac{3}{1}.$$

Tendremos el mismo caso cuando discutamos la multiplicación. A causa de esta correspondencia de relaciones y operaciones, decimos que el sistema de los números enteros está *sumergido* en el sistema de los números racionales. Por lo que, desde este punto de vista, el sistema de los números enteros puede considerarse como un subsistema del sistema de los números racionales y éste será el criterio que adoptaremos en adelante.

Sumario

Hasta aquí nos hemos interesado ampliamente en la investigación y desarrollo de nuestra noción intuitiva de lo que es número racional. Así quedamos enterados de que conviene distinguir los números racionales de sus diferentes símbolos. También distinguimos entre números enteros y sus correspondientes números racionales. Además, hemos señalado como podemos (y debemos) considerar el conjunto de los números enteros como un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Ahora que nos hemos familiarizado con los números racionales y queremos trabajar con ellos debemos expresarlos con sus símbolos habituales. Entonces, como es usual, hablaremos del *número* racional dos tercios $\left(\frac{2}{3}\right)$ y del cinco cuartos $\left(\frac{5}{4}\right)$ y aun del *número* racional tres (3).

Hagamos en seguida un repaso de algunos de los temas que hemos tratado, pero emplearemos letras para representar números enteros.

Cuando representamos un número racional mediante la fracción $\frac{a}{b}$, donde a es un número entero y b es un número natural, pensamos en que cada intervalo unitario del eje numérico se ha dividido en b subintervalos congruentes de los que tomamos tantos cuantos indica a.

El número b es el denominador de la fracción $\frac{a}{b}$ y el número a es el numerador.

La fracción $\frac{a}{b}$ es el símbolo fraccionario más simple del número racional que representa, siempre que a y b no tengan factor común mayor que 1.

Sin embargo, en adelante si $b=1$ generalmente escribiremos a en vez de $\frac{a}{1}$.

El símbolo fraccionario más simple no es siempre el más útil para algún propósito particular. El símbolo $\frac{n\times a}{n\times b}$ donde n es un número natural, es frecuentemente más útil para un propósito particular que el símbolo dado $\frac{a}{b}$.

Por ejemplo, para comparar

$$\frac{a}{b} \quad \text{con} \quad \frac{c}{d},$$

escribimos

$$\frac{a}{b}=\frac{d\times a}{d\times b}=\frac{a\times d}{b\times d} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d},$$

y comparamos

$$\frac{a\times d}{b\times d} \quad \text{con} \quad \frac{b\times c}{b\times d}.$$

Pero ahora los denominadores son iguales y así (recuerde el eje numérico) sólo tenemos que comparar los numeradores; esto es:

$$a\times d \quad \text{con} \quad b\times c.$$

Por consiguiente, $\frac{a}{b}$ es menor que, igual a, o mayor que $\frac{c}{d}$ según que $a\times d$ sea menor que, igual a, o mayor que $b\times c$. A lo anterior se le llama regla del *producto en cruz.*

Como sabemos, el símbolo $>$ se lee "es mayor que" o "mayor que" y el símbolo $<$ se lee "es menor que" o "menor que". Empleando este simbolismo, los resultados del parágrafo anterior pueden expresarse de la siguiente manera.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si, y sólo si } a\times d<b\times c,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si, y sólo si } a\times d=b\times c,$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si, y sólo si } a\times d>b\times c.$$

Las relaciones $>$ y $<$ son transitivas; por tanto, si

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}<\frac{e}{f} \quad \text{entonces} \quad \frac{a}{b}<\frac{e}{f}.$$

Los números racionales entre 0 y 1

Mucho nos ilustra la representación en el eje numérico del conjunto de puntos que corresponden a todos los números racionales. Fijemos nuestra atención, sin embargo, en aquellos números racionales que se localizan entre 0 y 1.

¿Hay un número racional que sea el *siguiente* después de 0, en el sentido en el que 1 es el siguiente número entero después de 0? Analicemos esto, de la siguiente manera: $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{1}{4}$ etc., como se muestra en la figura 21.

FIGURA 21

Es más fácil, tal vez más sugestivo, si escogemos números sucesivos de tal manera que, cada vez que indiquemos otro punto correspondiente, dividamos el intervalo determinado en dos partes congruentes como se indica en la figura 22. Entonces, $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{16} < \frac{1}{8}$, y así sucesivamente.

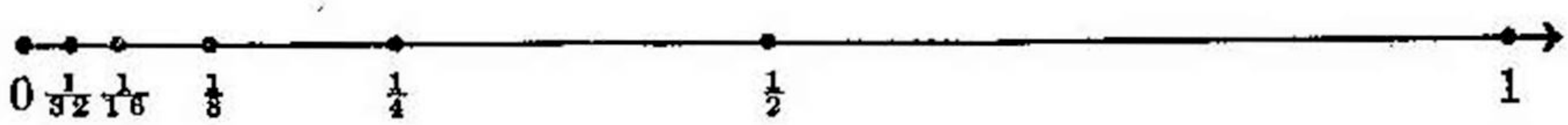


FIGURA 22

Vemos pues, que no hay un número racional que sea el siguiente después de 0.

Prueba:

Dado $\frac{a}{b}$ que es cualquier número racional distinto de 0, en donde a y b son números naturales; considérese la fracción

$$\frac{a}{2\times b}.$$

Representa esta la fracción anterior un número racional diferente de cero, porque el numerador a y el denominador $2\times b$ son números naturales. Además

$$\frac{a}{2\times b} < \frac{a}{b},$$

porque

$a\times b \quad 2\times b\times a.$ (Ver sumario páginas 31-32.)

En consecuencia, por cualquier número racional dado, diferente de cero, podemos obtener otro número racional diferente de cero, que sea menor que el número dado.

También, entre dos números racionales cualesquiera, siempre podemos obtener un tercer número racional. No obstante, si entre dos números racionales cualesquiera, hay un tercero, entonces entre el primero y el tercero debe haber un cuarto número racional, y así sucesivamente. Por tanto, entre dos números racionales cualesquiera, hay un número infinito de números racionales como se sugiere en la figura 22, entre los números racionales 0 y 1. Describimos esta posibilidad diciendo que el conjunto de los números racionales es *denso.*

Trataremos ahora de enumerar los números racionales entre 0 y 1 de manera sistemática, tomando un primero, luego un segundo y así sucesivamente, en tal forma que cualquier número racional dado, pueda ser escogido. ¿Es posible esto? No podemos hacerlo tomando los números racionales en su orden natural, puesto que no hay número racional siguiente de cero.

Sin embargo, tomemos primero el número racional $\frac{1}{2}$; luego los números racionales representados por fracciones con denominador 3 y numeradores en orden creciente $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ después los números racionales representados por fracciones con denominador 4 y numeradores en orden creciente $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$; y así los demás. Pero omitimos a $\frac{2}{4}$ porque hemos incluido ya este número, nada más que lo incluimos expresado en su forma fraccionaria más simple $\frac{1}{2}$. ¿Se ve cómo, mediante este método, cualquier número racional dado, digamos $\frac{127}{45\,678}$, ocupará un lugar determinado en esta enumeración?

Por tanto, hemos sugerido un método sistemático para establecer una *correspondencia biunívoca* entre el conjunto de los números racionales que se hallen entre cero y uno, y el conjunto de números naturales (figura 23).

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{7}$	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

FIGURA 23

De lo anterior vemos que en este sentido hay exactamente tantos números racionales entre cero y uno como hay elementos en el conjunto de los números naturales.*

Tenga presente que cuando los elementos de dos conjuntos se pueden poner en correspondencia biunívoca, entonces los conjuntos son equivalentes, o de igual magnitud. Es necesario, por esto, comprender perfectamente bien la idea de correspondencia biunívoca

Como otros ejemplos vemos cómo se pueden contar no sólo los racionales entre 0 y 1, sino todos los racionales mediante la siguiente disposición:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\[6pt] \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \\[6pt] \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\[6pt] \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} \end{array}$$

En este arreglo debido a Cantor, observamos que existe una correspondencia biunívoca entre los números racionales y los números naturales $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\[6pt] 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

por tanto, vemos que hay tantos números racionales como números naturales. Cuando los elementos de un conjunto pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, se dice que dicho conjunto es numerable o denumerablemente infinito.

Operaciones con los números racionales

Hemos observado la conveniencia de usar los numerales de los números enteros como símbolos para ciertos números racionales,

$$0=\frac{0}{1}, \quad 1=\frac{1}{1}, \quad 2=\frac{2}{1}, \quad 3=\frac{3}{1}, \quad \text{etc.};$$

y aun considerar al conjunto de los números enteros como un subconjunto del conjunto de los números racionales.

* Recuerde que en el caso se están señalando solamente los números racionales entre cero y uno, por lo que se escogen los numeradores en orden creciente, pero siempre menores que el denominador. [N. del T.]

Establecer esta identificación sería completamente torpe si cuando pasáramos por alto la definición de adición para los números racionales, deberíamos tener, por ejemplo,

$$\frac{1}{1}+\frac{3}{1}=\frac{2}{1},$$

porque entonces tendríamos

$$1+3=2$$

cuando los símbolos "1", "3" y "2" representaran números racionales, pero tendríamos

$$1+2=3$$

cuando representaran números enteros.

Aunque, afortunadamente, este no es el caso, la adición se define para los números racionales de tal manera que

$$1+2=3,$$

ya sea que estos símbolos expresen números enteros o los correspondientes números racionales.

Así, el empleo de los numerales familiares, como veremos, que expresan números enteros, como símbolos para estos números racionales particulares, es consistente en lo que concierne a las operaciones fundamentales de adición y multiplicación y a las operaciones inversas de sustracción y división. Hemos visto ya, que además es consistente en lo que toca a la comparación de números.

No debería sorprendernos que esto sea así, puesto que *siempre recurriremos a nuestras nociones respecto a los números enteros al definir qué se quiere decir por operaciones con los números racionales.* De este modo la consistencia será virtualmente automática. Podríamos definir las operaciones con racionales en cualquier forma, pero de hecho lo hacemos de tal manera que el sistema de números enteros y nuestras nociones intuitivas sean nuestro modelo.

Por esta razón, sería ventajoso para el lector repasar las definiciones de adición y multiplicación de números enteros, y también sus propiedades de cerradura, asociatividad, etc., que se discutieron en el cuaderno 2: *Números enteros.*

Adición de números racionales

Desde el punto de vista matemático es necesario empezar por definir formalmente qué es adición de números racionales. En otras palabras, podríamos escribir en términos generales qué se entiende por adición de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

Sin embargo, en el campo intuitivo, esto resulta una exposición poco satisfactoria. Es preferible recurrir una vez más al eje numérico para ver si podemos concebir la forma de que dos números racionales lleguen a sumarse. Debemos tener presente el sistema de los números enteros como modelo. Ya sabemos cómo se efectúa la adición de números enteros. Entonces,

$$6+7=13$$

es un hecho de la suma conocida que implica tres números enteros. También, 6 y 7 son representaciones de números racionales. Queremos estar seguros de que la suma de estos números racionales es el número racional representado por 13.

Si procedemos a comprobarlo, nos encaminaremos a definir la adición de números racionales con las propiedades que queremos que tenga, tales como la conmutatividad y la asociatividad

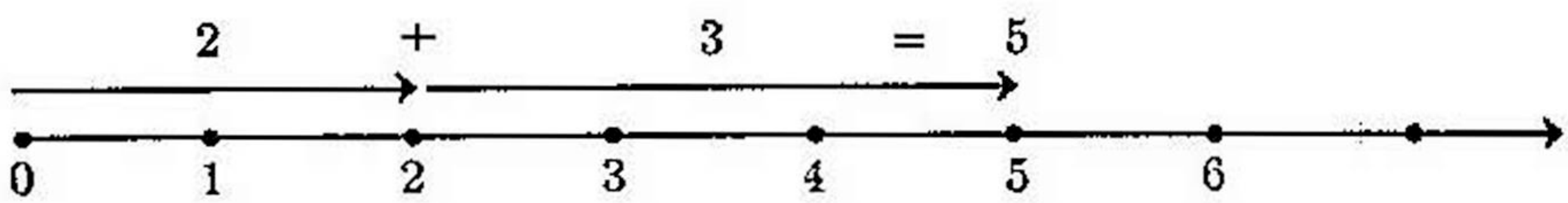


Figura 24

La suma $2+3$ puede ilustrarse en el eje numérico, como se muestra en la figura 24. El punto que corresponde a 2 se localiza contando dos segmentos unitarios a partir del punto 0. Después contamos tres segmentos unitarios a la derecha del punto correspondiente a 2 con lo que se obtiene el punto que corresponde a 5. Desde luego, podríamos haber localizado primero el punto correspondiente a 3, y después contar dos segmentos unitarios a la derecha de este punto para llegar también al punto correspondiente a 5, como se indica en la figura 25.

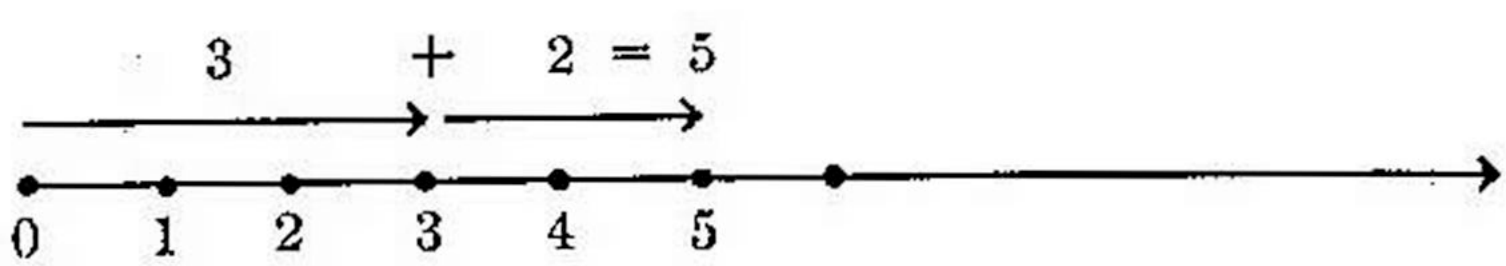


Figura 25

Empleemos el eje numérico para ver qué punto debe corresponder a la suma de los números racionales $\frac{7}{7}$ y $\frac{2}{7}$. (Ver la figura 26.)

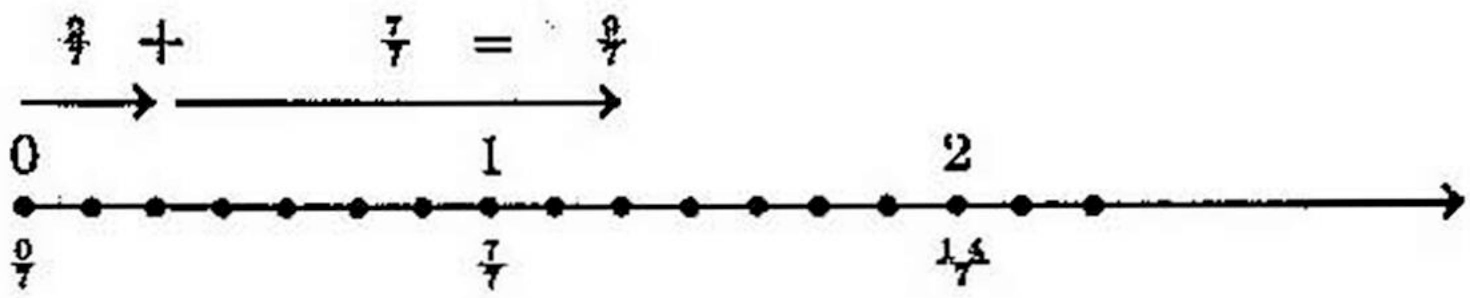


FIGURA 26

Se dividen los dos primeros segmentos unitarios en siete partes congruentes. El punto correspondiente a $\frac{2}{7}$ se localiza primero, contando dos partes congruentes. A partir de este punto, se cuentan siete partes congruentes hacia la derecha $\left(\text{que representan } \frac{7}{7}\right)$. El punto al que se llega corresponde a $\frac{9}{7}$. Esto significa que de las consideraciones del eje numérico obtenemos la suma de $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{7}$ que es $\frac{9}{7}$ y escribimos

$$\frac{2}{7}+\frac{7}{7}=\frac{9}{7}$$

Es digno de mención que así como la expresión $7+3$ en sí misma es un numeral, la expresión $\frac{2}{7}+\frac{7}{7}$ más bien que indicar "hacer algo de aritmética" es un numeral cuando su significado está definido como se sugirió anteriormente, entonces $\frac{2}{7}+\frac{7}{7}$ representa un número racional. El numeral $\frac{9}{7}$ es la expresión más simple para el número correspondiente. Gran parte del trabajo efectuado al realizar cálculos aritméticos, consiste realmente en obtener una expresión simple para un número expresado mediante un numeral complicado.

¿Qué punto del eje numérico corresponde a la suma $\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$? En la figura 27 vemos que el punto buscado es el que corresponde al número $\frac{10}{5}$ (cuya expresión más simple es 2).

Figura 27

De igual modo podemos emplear el eje numérico para demostrar que $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$ representa al número racional $\frac{10}{5}$.

Los dos ejemplos anteriores tienen algo en común. La expresión $\frac{2}{7}+\frac{7}{7}$ implica dos fracciones con el mismo denominador 7. En la expresión $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$ las dos fracciones tienen el número 5 como denominador. Observe que

$$\frac{2}{7}+\frac{7}{7}=\frac{9}{7} \text{ puede escribirse como } \frac{2}{7}+\frac{7}{7}=\frac{2+7}{7},$$

y

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{10}{5} \text{ puede escribirse como } \frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{3+7}{5}.$$

El numerador de la fracción $\frac{2+7}{7}$ es la suma de los numeradores de las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{7}$ y el denominador de $\frac{2+7}{7}$ es el mismo que el denominador común de $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{7}$. También la fracción $\frac{3+7}{5}$ tiene el mismo denominador que las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{5}$ y su numerador es la suma de los numeradores de $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{5}$.

De esto generalizamos: *la suma* de los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ la definimos como $\frac{a+c}{b}$ sin que importen los números enteros que sean a y c, que número natural sea b. En forma más breve esto puede escribirse

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},$$

donde a y c son números enteros cualesquiera y b es cualquier número natural.

Cada uno de los siguientes enunciados es una proposición verdadera:

$$\frac{3}{11}+\frac{15}{11}=\frac{18}{11},$$
$$\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5}{2},$$
$$\frac{0}{8}+\frac{7}{8}=\frac{7}{8},$$
$$\frac{19}{100}+\frac{81}{100}=\frac{100}{100}.$$

Obtengamos ahora la suma de los números racionales representados por las fracciones $\frac{2}{3} = \frac{5}{7}$. Los denominadores de estas fracciones no son iguales, y parece que la definición que hemos dado en el párrafo anterior, no se aplica aquí. Recuerde, sin embargo, que sumamos números racionales, no sus símbolos, y que dos números racionales cualesquiera pueden expresarse mediante fracciones con el mismo denominador. Entonces tenemos:

$$\frac{2}{3}=\frac{7\times 2}{7\times 3}=\frac{14}{21} \text{ y } \frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{3\times 7}=\frac{15}{21}.$$

Vemos que las fracciones $\frac{14}{21}$ y $\frac{15}{21}$ pueden emplearse en lugar de $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$ para expresar a los dos números racionales cuya suma estamos buscando. Ahora la definición expresada mediante

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},$$

puede aplicarse:

$$\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}$$
$$=\frac{29}{21}$$

La suma de los números racionales expresados por fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$ es el número racional expresado por $\frac{29}{21}$. El procedimiento empleado en este ejemplo puede mostrarse en forma más reducida, de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{7\times 2}{7\times 3}+\frac{3\times 5}{3\times 7}$$
$$=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$$

$$= \frac{14 + 15}{21}$$

$$= \frac{29}{21}$$

Debe observarse que

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7}, \quad \frac{7\times 2}{7\times 3} + \frac{3\times 5}{3\times 7}, \quad \frac{14}{21} + \frac{15}{21}, \quad \frac{14+15}{21} \quad \text{y} \quad \frac{29}{21}$$

son todas expresiones del mismo número, la última es la expresión más simple. Observe que $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ se reemplazó por la expresión más complicada $\frac{7\times 2}{7\times 3} + \frac{3\times 5}{3\times 7}$. Hubo una buena razón para esto: queríamos fracciones con igual denominador.

La suma de los números racionales $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{6}$ puede obtenerse de la misma manera:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{6\times 3}{6\times 4} + \frac{4\times 7}{4\times 6}$$

$$= \frac{18}{24} + \frac{28}{24}$$

$$= \frac{18+28}{24}$$

$$= \frac{46}{24}.$$

El número racional $\frac{46}{24}$ es la suma de los números racionales $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{6}$. La expresión más simple de esta suma es $\frac{23}{12}$, el símbolo se obtiene dividiendo entre 2 tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{46}{24}$.

Sin embargo, no hay razón forzosa para insistir en que siempre debe obtenerse la expresión más simple para la suma.

Otra consideración concerniente al lenguaje empleado al hablar de números racionales puede ser útil. Nos permitimos afirmar, por ejemplo, que la suma $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{6}$ es $\frac{46}{24}$. En tal enunciado, se entiende de antemano que queremos decir el número racional $\frac{3}{4}$, el número racional $\frac{7}{6}$ y el número racional $\frac{46}{24}$. No sus expresiones fraccionarias, porque no se suman expresiones.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ que son números racionales donde a y c son números enteros y b_b y d_d son números naturales. La suma de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puede obtenerse mediante el mismo procedimiento empleado en los dos ejemplos anteriores. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a\times d}{b\times d}+\frac{b\times c}{b\times d} \\ &= \frac{(a\times d)+(b\times c)}{b\times d}. \end{aligned}$$

Esto no sólo demuestra que podemos aplicar nuestra definición para obtener la suma de dos números racionales cualesquiera, sino que nos da la regla para obtener rápidamente la suma. Ilustremos esto con la suma de $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{7}{9}+\frac{5}{6} &= \frac{(7\times 6)+(9\times 5)}{9\times 6} \\ &= \frac{42\times 45}{54} \\ &= \frac{87}{54} \end{aligned}$$

Con cierta práctica podemos aprender a encontrar algunas de estas sumas sin usar lápiz ni papel.

El último ejemplo puede tratarse empleando un denominador común menor que el que se empleó:

$$\begin{aligned} \frac{7}{9}+\frac{5}{6} &= \frac{2\times 7}{2\times 9}+\frac{3\times 5}{3\times 6} \\ &= \frac{14}{18}+\frac{15}{18} \\ &= \frac{14+15}{18} \\ &= \frac{29}{18}. \end{aligned}$$

Aquí hemos empleado el mínimo común múltiplo (ver cuaderno 5: *Números y sus factores*) de 6 y 9 como denominador. Sin embargo, debe tenerse presente, que la fracción $\frac{87}{54}$ es una expresión tan válida para la suma $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$ como lo es la fracción $\frac{29}{18}$.

Como se observó anteriormente, los numerales 7 y $\frac{14}{2}$ expresan el mismo número racional. También los numerales 3 y $\frac{21}{7}$ expresan el mismo número racional. Por tanto, la suma de 7 y 3 debe ser la misma que la suma de $\frac{14}{2}$ y $\frac{21}{7}$. Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{14}{2}+\frac{21}{7}&=\frac{(14\times 7)+(2\times 21)}{2\times 7}\\ &=\frac{98+42}{14}\\ &=\frac{140}{14}\\ &=\frac{140\div 14}{14\div 14}\\ &=\frac{10}{1}\\ &=10.\end{aligned}$$

Justamente ilustra el hecho de que, en la adición, cuando los numerales de los números enteros se tratan como numerales de números racionales, no se tiene ninguna incoherencia y, en consecuencia, tenemos que

$$7+3=10$$

cuando los numerales representan números enteros.

Tratando en una forma más geométrica la suma de dos números racionales representados por fracciones que tienen diferentes denominadores, consideramos el eje numérico respecto al problema de obtener una expresión simple para la suma de $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$. En el eje *a*) en la figura 28 se muestran puntos que corresponden a cuartos (se dividió en cuatro subintervalos congruentes al intervalo unitario) y se marcó el punto correspondiente a $\frac{3}{4}$. En el eje *b*) se muestran puntos que corresponden a sextos, y se marcó el punto correspondiente a $\frac{5}{6}$.

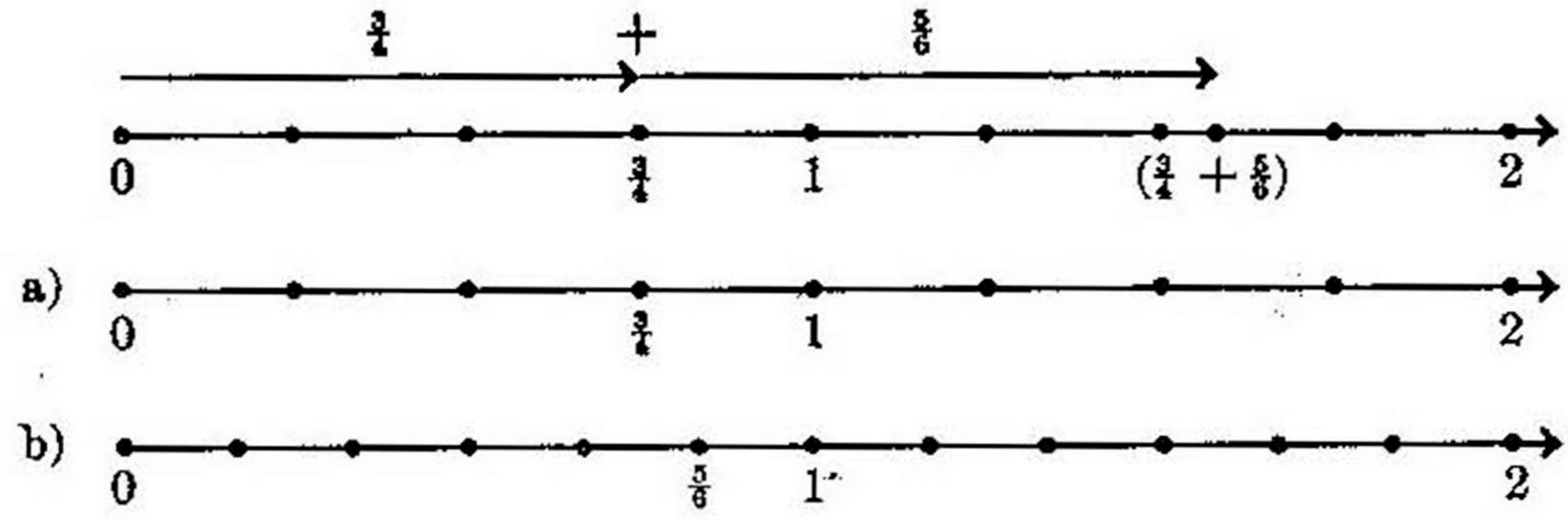


FIGURA 28

Para obtener una expresión de $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ se necesita un eje numérico en el que el conjunto de puntos de separación, que marcan los subintervalos del intervalo unitario, contenga el punto $\frac{3}{4}$ y el punto $\frac{5}{6}$. ¿Cómo puede encontrarse un número adecuado de subintervalos?

Supóngase ahora que en la figura 28 cada subintervalo del eje *a*) se divide en seis partes congruentes (véase el eje *c*) de la figura 29) y que cada subintervalo del eje *b*) se divide en cuatro partes congruentes (véase el eje *d*), de la figura 29). En el eje *c*) de esa figura, habrá 4×6 subintervalos y el punto correspondiente a $\frac{3}{4}$ está marcado también con $\frac{18}{24}$; en el eje *d*) habrá 6×4 subintervalos y el punto correspondiente a $\frac{5}{6}$ está marcado también con $\frac{20}{24}$. En el eje *e*) hay 24 subintervalos en cada intervalo unitario, y está representada la suma $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{18}{24}+\frac{20}{24}=\frac{38}{24}$.

¿Es 24 el número más pequeño de subintervalos que podría emplearse? En la figura 29 *f*) vemos que estos subintervalos podrían agruparse en pares, y que los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ serían puntos de separación.

En el examen anterior definimos la adición de números racionales basados en nuestro conocimiento de la adición de números enteros, apoyados en nuestra intuición de la correspondencia entre números racionales y puntos del eje numérico. Para confirmar esta definición y familiarizarnos más con ella, imaginemos también otras cantidades y no sólo puntos del eje numérico.

Por ejemplo, supongamos que Tomás caminó $\frac{1}{3}$ de kilómetro de su casa

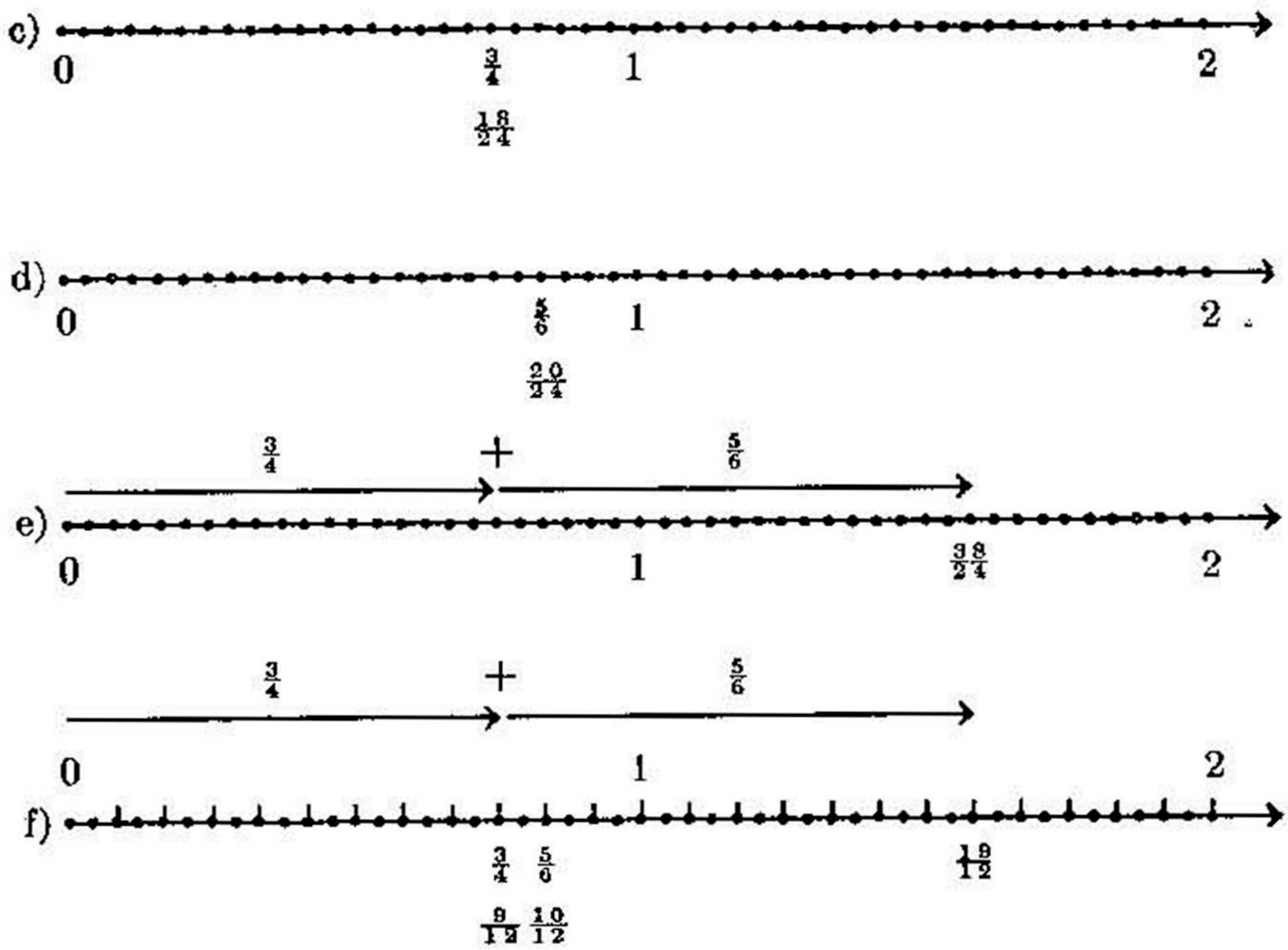


FIGURA 29

a la de un amigo, y luego $\frac{1}{2}$ kilómetro más, a una tienda. ¿Qué tanto caminó Tomás?

Suponga que duró $\frac{1}{4}$ de hora en caminar de su casa a la de su amigo, luego permaneció $\frac{1}{2}$ hora allí, y empleó $\frac{1}{4}$ de hora más en caminar de la casa de ese amigo a la tienda. ¿Cuál fue el total de tiempo invertido?

Gastó $\frac{1}{10}$ de un peso en dulces, $\frac{3}{4}$ de un peso en verduras y $\frac{9}{4}$ de un peso en carne. ¿Cuánto gastó?

Propiedades de la adición de números racionales

Se recordará que en el cuaderno 2: *Números enteros,* señalamos que el conjunto de los números enteros es cerrado con respecto a la adición; esto es, que si a y b son números enteros entonces $a+b$ es también un número entero.

Además, las propiedades establecidas de los números enteros son las siguientes:

$a+b=b+a$	(propiedad conmutativa de la adición),
$a+(b+c)=(a+b)+c$	(propiedad asociativa de la adición),
$a+0=0+a=a$	(elemento idéntico de la adición).

¿Se cumplen propiedades análogas para los números racionales? Sí, desde luego, como vamos a verlo enseguida.

Primero observemos que éstas son propiedades de los *números,* no de sus símbolos. En particular, *al tratar con más de un número racional podemos representar todos estos números por fracciones que tengan el mismo denominador,* como ya se vio.

Después, observemos que para establecer estas propiedades, podemos escoger entre dos métodos, que son los siguientes:

En el primero, procedemos como hicimos en el caso de los números enteros de los principios básicos. Esto se ejemplifica en la figura 30, en relación a la ley conmutativa de la adición de números racionales.

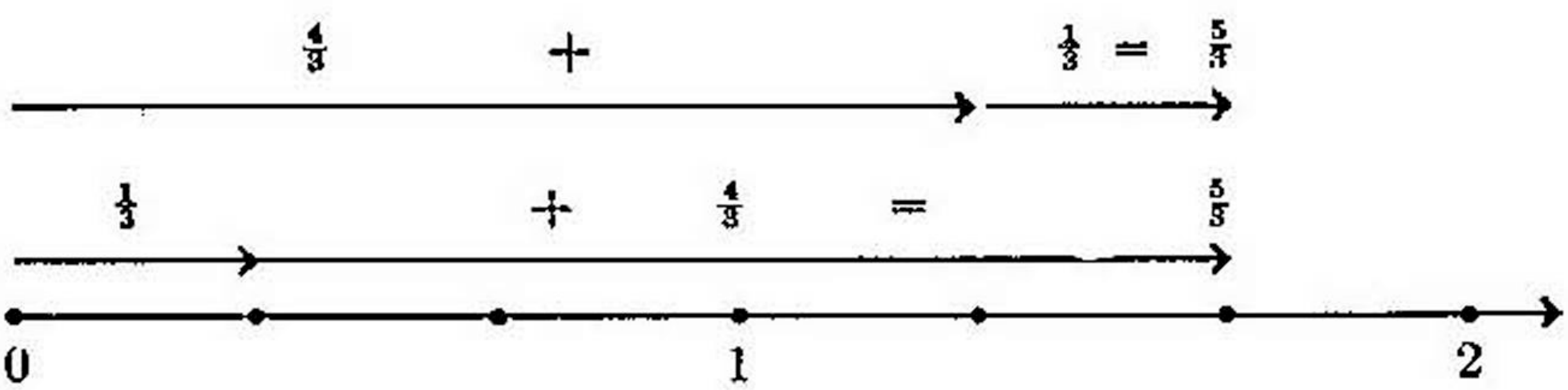


FIGURA 30

En el segundo método, que es el que seguiremos, *establecemos las propiedades de la adición de números racionales aplicando nuestros conocimientos de las propiedades análogas de los números enteros.*

Verificación de las propiedades de los números racionales

1. *Propiedad de cerradura de la adición.* Por definición, para números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (por conveniencia los hemos representado con fracciones que tienen el mismo denominador, lo que siempre podemos hacer), tenemos

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Ahora bien, a, b y c son números enteros, con $b \neq 0$. Por tanto, el numerador del miembro derecho de esta ecuación es un número entero, puesto que el sistema de números enteros es cerrado con respecto a la adición, y también el denominador es un número entero, diferente de cero. Entonces el miembro derecho representa un número racional, como se quiere. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}.$$

2. *Propiedad conmutativa de la adición.* Por definición, tenemos

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},$$

$$\frac{c}{b}+\frac{a}{b}=\frac{c+a}{b}$$

Pero

$$a+c=c+a$$ (Propiedad conmutativa de la adición de números enteros.)

Por tanto:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}=\frac{c+a}{b}=\frac{c}{b}+\frac{a}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3} \text{ y } \frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3}.$$

3. *Propiedad asociativa de la adición.* Por definición, tenemos:

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c+d}{b}=\frac{a+(c+d)}{b},$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{d}{b}=\frac{a+c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{(a+c)+d}{b}$$

Pero

$$a+(c+d)=(a+c)+d$$ (Propiedad asociativa de la adición de números enteros.)

Por tanto,

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)=\frac{a+(c+d)}{b}=\frac{(a+c)+d}{b}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{d}{b}.$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4+2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=\frac{7}{3},$$

y

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1+4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}.$$

Se recordará que la adición se definió únicamente respecto de pares de números racionales; por consiguiente,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{e}{b}$$

significará

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{e}{b}$$

teniendo en cuenta que los dos primeros números se suman primero, y su resultado se suma después al tercer número. Sin embargo, por la propiedad asociativa, pueden sumarse antes el segundo y tercer sumandos, y su resultado después se suma al primer sumando. De hecho, cuando también tomamos en cuenta la propiedad conmutativa, vemos que la suma puede efectuarse tomando los sumandos en cualquier orden sin que se altere el resultado.

4. *Elemento idéntico de la adición.* Si $\frac{a}{b}$ es un número racional, y puesto que

$$\frac{0}{b}=0,$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+0&=\frac{a}{b}+\frac{0}{b}\\ &=\frac{a+0}{b} && \text{(definición de adición)}\\ &=\frac{a}{b}, && \text{(puesto que 0 es el elemento idéntico de la suma, en el sistema de los números enteros)}\end{aligned}$$

y de manera semejante

$$\begin{aligned}0+\frac{a}{b}&=\frac{0}{b}+\frac{a}{b}\\ &=\frac{0+a}{b}\\ &=\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

Ahora que completamos la verificación formal de estas propiedades de los números racionales, debemos probar que las entendemos, aplicándolas a distintas situaciones físicas.

En la sección precedente tratamos un ejemplo, un muchacho hipotético: Tomás. Expresamos por medio de números racionales la distancia que caminó de su casa a la de su amigo, y la que recorrió de allí a la tienda. ¿Qué empleamos para expresar la distancia total que caminó? Empleamos un número racional ¿qué propiedad explica esto?

Encontramos que recorrió $\frac{5}{6}$ de un kilómetro en total. Recorriendo el camino al revés, de la tienda a su casa ¿cuánto caminó? Nuevamente, $\frac{5}{6}$ de un kilómetro. Indique la propiedad que ejemplifica lo anterior.

¿Cuánto gastó en total, si primero compró los dulces, después las verduras y por último la carne? ¿Qué propiedad ejemplificamos?

Si no compró agujetas para los zapatos ¿cuánto gastó en dulces y agujetas? ¿Qué propiedad ilustra esto?

Grupo de ejercicios 4

1. Explique cada uno de los pasos en el siguiente cálculo.

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{6}\right)+\frac{4}{7}=\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{7}\right) \qquad a) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$=\frac{3}{7}+\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{6}\right) \qquad b) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$=\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)+\frac{5}{6} \qquad c) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$=\frac{7}{7}+\frac{5}{6} \qquad d) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$=\frac{6}{6}+\frac{5}{6} \qquad e) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$=\frac{11}{6} \qquad f) \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

2. Obtener la expresión más simple de cada una de las siguientes sumas.

a) $5+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{5}{7}+\frac{5}{3}$ *b*) $\frac{2}{3}+4+\frac{3}{5}+\frac{4}{3}+\frac{1}{5}$

3. Demuestre la suma de $\frac{5}{8}$ y $\frac{1}{8}$ en el eje numérico.

4. Empleando cuadrados como figuras unitarias, y dividiéndolas en regiones congruentes con segmentos de recta verticales, como se indica en la figura 31, demuestre las siguientes propiedades.

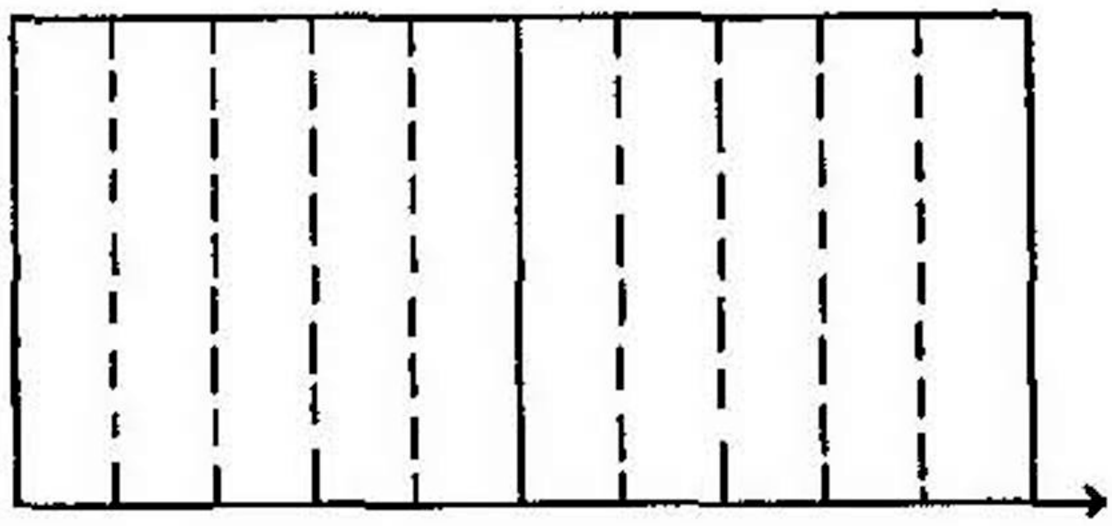


FIGURA 31

a) Cerradura respecto a la adición, tomando $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$

b) Conmutatividad de la adición, tomando $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$.

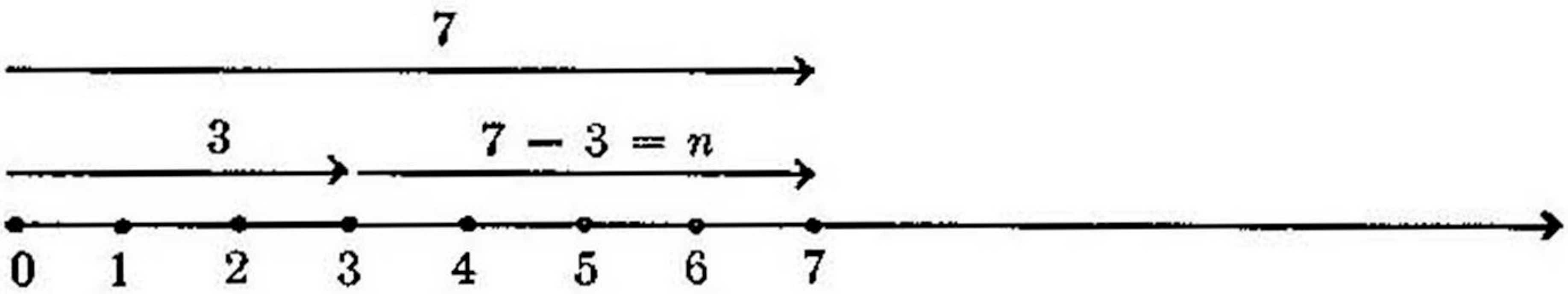
c) Asociatividad de la adición, tomando $\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)$

d) El elemento idéntico de la adición, tomando $\frac{2}{5}+\frac{0}{5}$ y $\frac{0}{5}+\frac{2}{5}$.

Sustracción de números racionales

Se recordará que en el cuaderno 2: *Números enteros,* se definió la operación de sustracción como la inversa de la operación de adición. ¿Qué indicamos con la expresión $7-3$? Considerando en términos de conjuntos, examinamos un conjunto A que tiene siete elementos y un conjunto B que tiene tres, y buscamos un conjunto C, disjunto respecto a B, tal que $B \cup C$ pueda ponerse en correspondencia biunívoca con A; entonces el conjunto C debe tener cuatro elementos; así, escribimos $7-3=4$. Considerando en términos de subconjuntos, nos proponemos saber cuál es el número de elementos del conjunto A que resultan sin aparear, cuando establecemos una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto B y los elementos de un subconjunto de A; nuevamente obtenemos $7-3=4$. Por último, considerando directamente en términos de adición, decimos que $7-3=4$ porque 4 es la expresión más simple del número al que sumándole 3 da 7.

Todo esto, desde luego, puede demostrarse en el eje numérico, como vemos en la figura 32.



$3 + n = 7, n = 4$

FIGURA 32

Para los números racionales dados, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, donde $\frac{a}{b}$ no es menor que $\frac{c}{d}$, definimos la diferencia

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$$

como el número racional $\frac{e}{f}$ tal que

$$\frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a}{b}.$$

Nuestro problema es determinar $\frac{e}{f}$, de tal manera que la ecuación anterior sea verdadera.

Veamos cómo podemos hacerlo. Desde luego, no estamos satisfechos con la expresión $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ sino que queremos expresar la fracción como $\frac{e}{f}$.

¿Cuál es la expresión fraccionaria, n, para el número racional $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$? Puesto que

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5}$$

$$= \frac{7}{5},$$

tenemos

$$n = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Aprovechando nuestra familiaridad con la sustracción de números enteros, escribimos

$$\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{7-3}{5}=\frac{4}{5}.$$

Entonces, $\frac{4}{5}$ es la expresión fraccionaria del número racional $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$.

¿Cuál es la expresión fraccionaria del número racional $\frac{7}{5}-\frac{3}{4}$? Esto representa un problema algo diferente al anterior, puesto que los denominadores son diferentes. Sin embargo, recordamos que dos números racionales cualesquiera, siempre pueden representarse mediante fracciones que tengan el mismo denominador; por lo que escribimos:

$$\frac{7}{5}=\frac{28}{20}, \qquad \frac{3}{4}=\frac{15}{20},$$

así que

$$\begin{aligned}\frac{7}{5}-\frac{3}{4}&=\frac{28}{20}-\frac{15}{20}\\&=\frac{28-15}{20}\\&=\frac{13}{20}.\end{aligned}$$

Luego, en general, si a no es menor que c tenemos

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

De manera semejante, si $a\times d$ no es menor que $b\times c$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{c}{d}&=\frac{d\times a}{d\times b}-\frac{b\times c}{b\times d}\\&=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{b\times d}.\end{aligned}$$

Puesto que $(a\times d)-(b\times c)$ siempre es un número entero, y $b\times d$ siempre es un número natural (recuerde que ni b ni d pueden ser 0), esta última expresión siempre representa a un número racional.

Grupo de ejercicios 5

1. Exprese los siguientes números racionales mediante fracciones que tengan el mismo denominador.

a) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$, y $\frac{5}{6}$

b) $\frac{5}{17}$ y $\frac{23}{51}$

c) $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}$, y $\frac{11}{5}$

d) $\frac{9}{7}, \frac{13}{21}$, y $\frac{19}{42}$

2. Efectúe las siguientes sustracciones expresando los números racionales mediante fracciones que tengan el mismo denominador.

a) $\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{43}{14} - \frac{13}{8}$

c) $\frac{33}{5} - \frac{57}{20}$

d) $\frac{59}{7} - \frac{144}{35}$

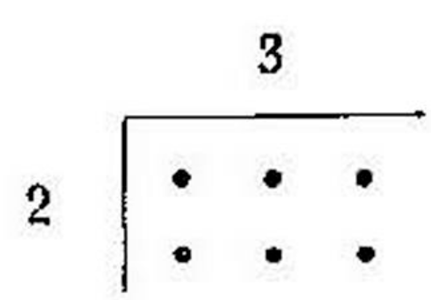
e) $\frac{26}{2} - \frac{21}{8}$

f) $\frac{5}{4} - \frac{4}{5}$

Multiplicación de números racionales

En las secciones anteriores, para explicar el significado de la adición de números racionales, empleamos ilustraciones que implican cosas como las figuras unitarias, el eje numérico y las experiencias de la vida diaria Sin embargo, ninguna de estas ilustraciones ni cualesquiera otras, podrían mostrarnos lo que significa la suma de dos números racionales, esto necesariamente es cuestión de definición. No obstante, decidimos emplear el sistema de los números enteros como modelo para determinar la forma en que debíamos efectuar la suma de dos números racionales, y en particular tratamos de obtener una definición congruente con la definición de adición de números enteros.

Procederemos en la misma forma que en la multiplicación. Definimos el producto de dos números enteros mediante un arreglo. Por ejemplo:



el producto 2×3 es el número de elementos de un arreglo que tiene dos renglones y tres columnas.

También podemos demostrar el producto dos por tres, mediante regiones unitarias como aparece en la figura 33.

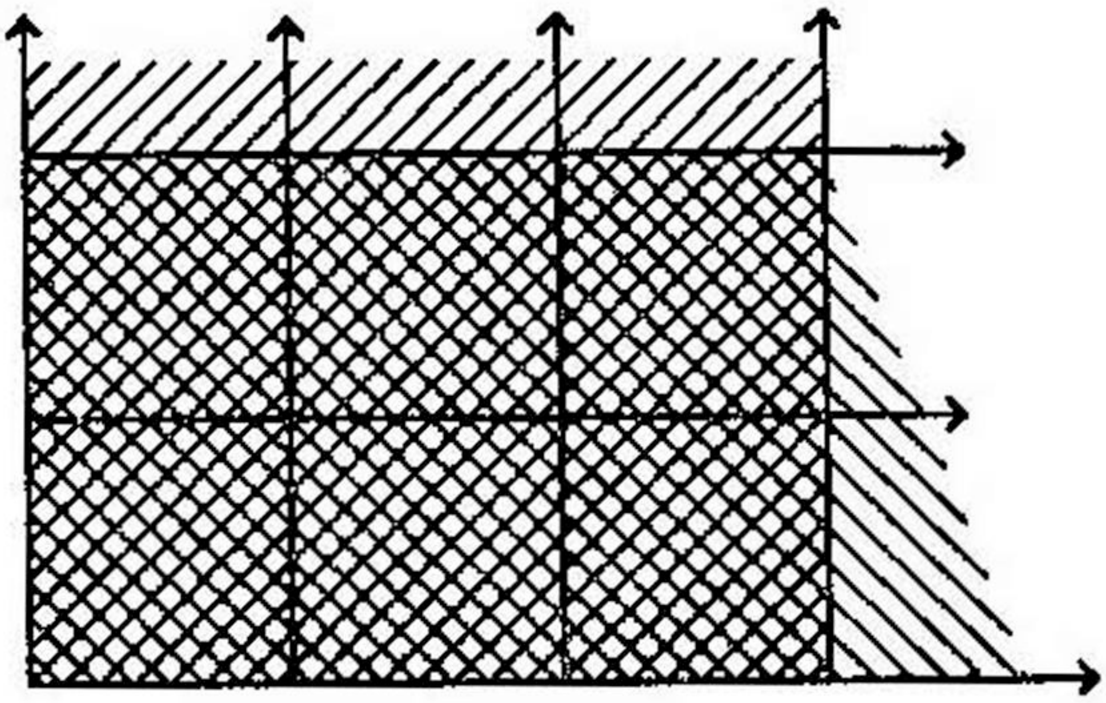


FIGURA 33

Observe que hay dos renglones y tres columnas de regiones unitarias.

La figura 34 *a*) muestra cada región unitaria dividida por líneas verticales, en cuatro regiones congruentes, tres de las cuales están rayadas. La figura 34 *b*) muestra cada región unitaria dividida por líneas horizontales, en dos regiones congruentes (considerando un eje numérico *vertical*) una de ellas rayada.

Ahora, hagamos coincidir estas dos figuras como se muestra en la figura 34 *c*).

El rayado doble (en forma de cruz) muestra el conjunto de regiones congruentes que corresponden al producto $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, así como la región de rayado doble de la figura 33 muestra el producto $2 \times 3 = 6$. Observe que cada región unitaria se ha dividido en ocho subregiones congruentes, tres de las cuales tienen rayado doble. Así que $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

De manera semejante, la figura 35 *a*) demuestra el conjunto de regiones congruentes que corresponde a $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ y vemos que $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$. La figura 35 *b*) demuestra que $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, y la figura 35 *c*) demuestra que $\frac{3}{2} \times \frac{11}{6} = \frac{33}{12}$

Examinemos estas demostraciones para ver cómo debe definirse el producto de dos números racionales cualesquiera.

En la figura 34 *c*) observamos que las líneas que forman las regiones congruentes dividen al lado vertical de cada región unitaria en dos segmentos congruentes y al lado horizontal en cuatro segmentos congruentes. En-

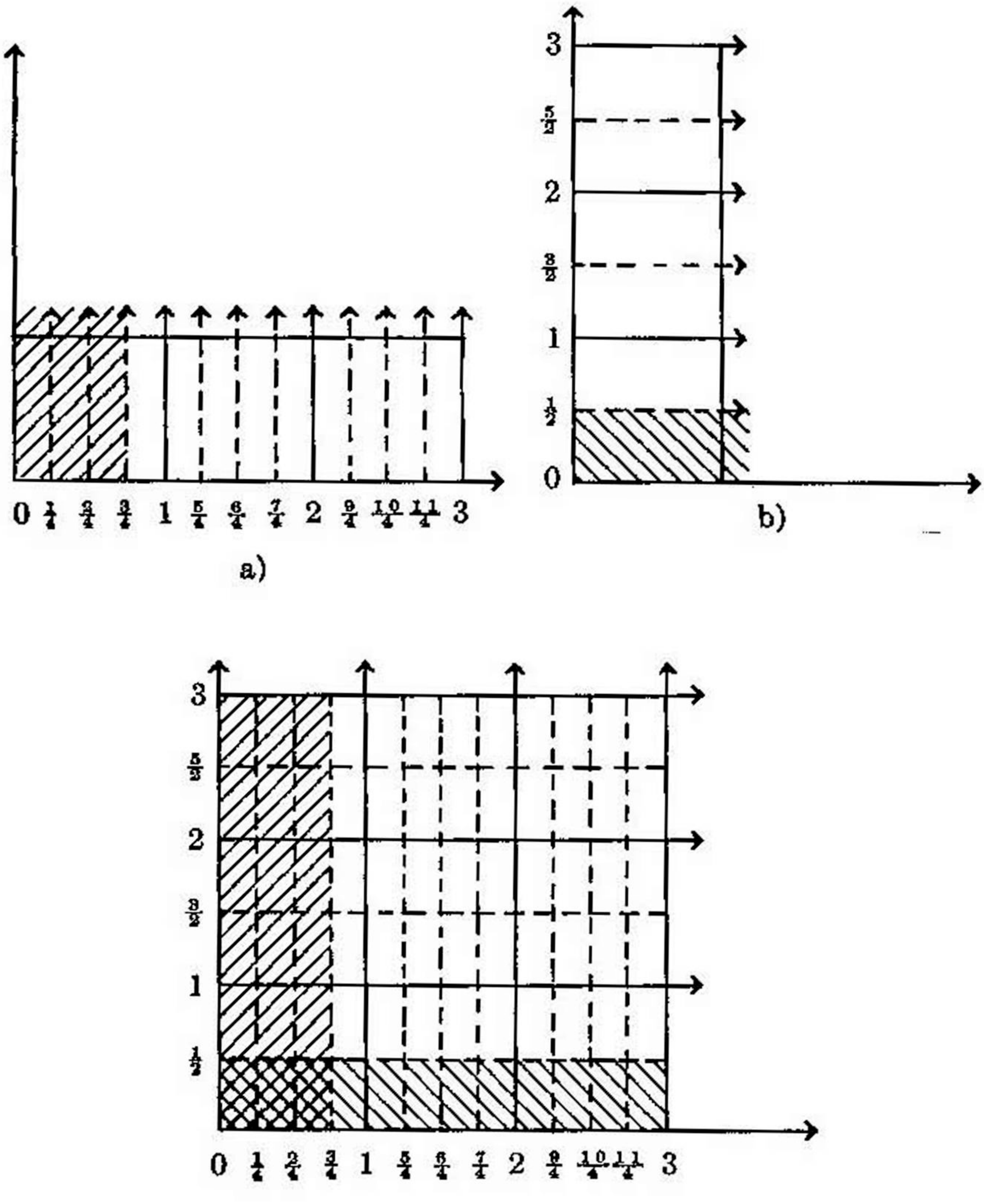


FIGURA 34

tonces, hay en cada región unitaria dos renglones y cuatro columnas, y la región unitaria quedó dividida en 2×4 o sea 8 regiones congruentes. En la región con doble rayado hay un renglón y tres columnas o sea 1×3 regiones congruentes. Entonces el producto de $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}$, o $\frac{3}{8}$, se re-

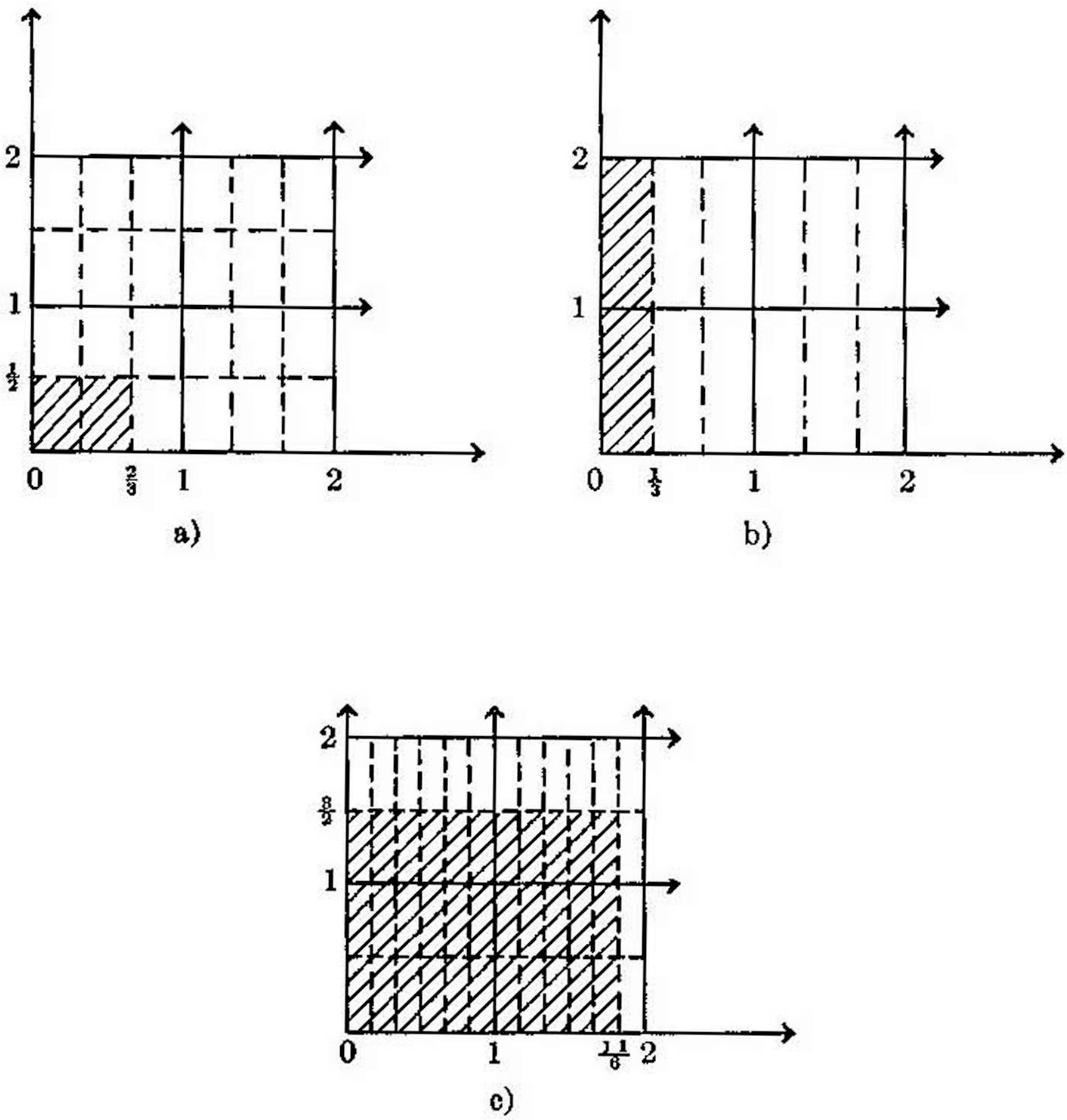


FIGURA 35

presenta rayando 1×3 de las 2×4 regiones congruentes en las que se ha dividido la región unitaria. De esto obtenemos:

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1\times 3}{2\times 4}$$
$$=\frac{3}{8}$$

La figura 35 sugiere las siguientes relaciones:

a) $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1\times 2}{2\times 3}=\frac{2}{6},$

$$b)\quad 2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times 1}{1\times 3}=\frac{2}{3},$$

$$c)\quad \frac{3}{2}\times\frac{11}{6}=\frac{3\times 11}{2\times 6}=\frac{33}{12},$$

y en la figura 33 tenemos:

$$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}=\frac{2\times 3}{1\times 1}=\frac{6}{1}.$$

Estos ejemplos sugieren la siguiente definición:

Dados dos números racionales cualesquiera, expresados en fracciones, el producto de esos números racionales se representa por una fracción cuyo numerador se obtiene multiplicando los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador se obtiene multiplicando los denominadores de las mismas fracciones.

Analizando el siguiente ejemplo, que con facilidad se representa en el eje numérico, vemos que esta definición es lógica.

Recuerde que cuando se definió la multiplicación de números enteros mediante arreglos, se concluyó que esta operación también puede interpretarse como una adición de sumandos iguales. Tenemos

$$2+2+2+2=8,$$

de aquí que escribimos

$$4\times 2=8.$$

Con números racionales,

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2+2+2+2}{3}$$

$$=\frac{8}{3},$$

de lo que por analogía escribimos

$$4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

Esto se demuestra en las figuras 36 *a*) y *b*).

Juan bebió $\frac{2}{3}$ de un cuarto de litro de leche en cada una de sus tres comidas, y la misma cantidad cuando se fue a acostar: ¿Cuánto bebió en total? Observando la figura 36 *b*) escribimos

$$4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

Esto puede escribirse como

$$\frac{4}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

y observamos que 8 es el producto de los numeradores 4 y 2, y tres es el producto de los denominadores 1 y 3.

En su derrotero, Juan camina $\frac{5}{4}$ de kilómetro en una hora. Con este promedio ¿cuánto caminará en dos horas?, en $\frac{1}{2}$ hora? en $\frac{2}{3}$ de hora? La figura 37 *a*) muestra por medio de flechas las distancias que Juan camina en 1 hora, 2 horas, 1 hora; $\frac{1}{2}$ hora y $\frac{2}{3}$ de hora.

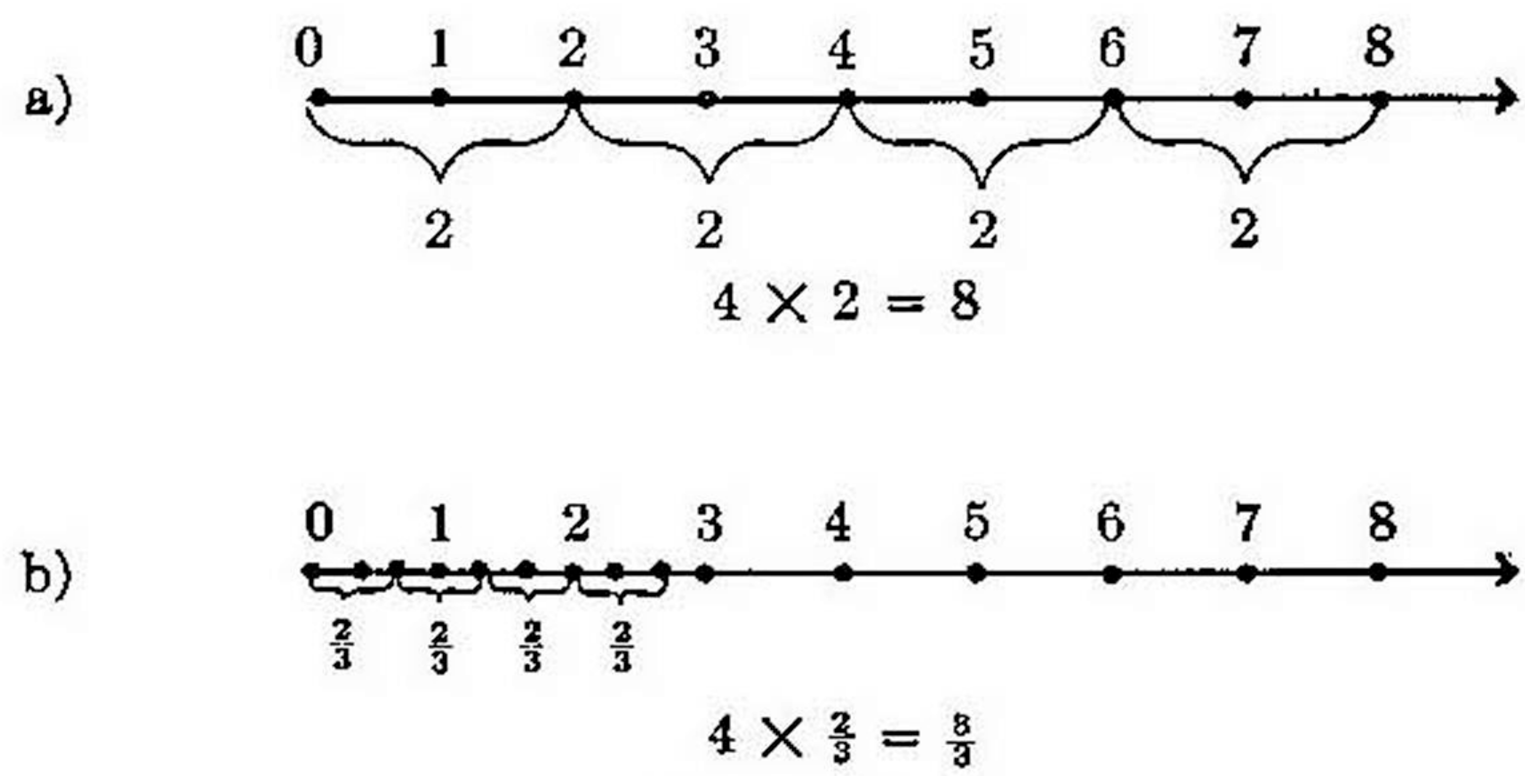
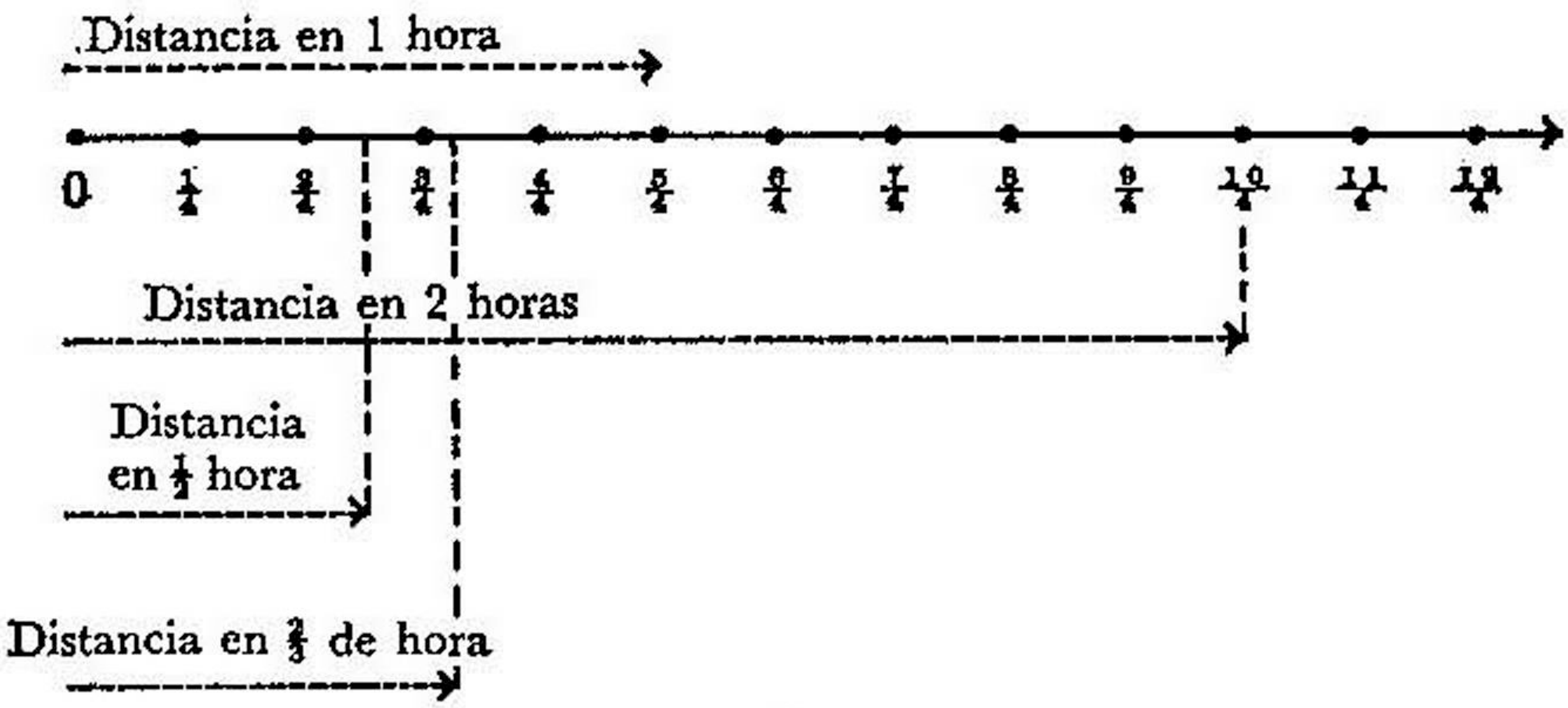
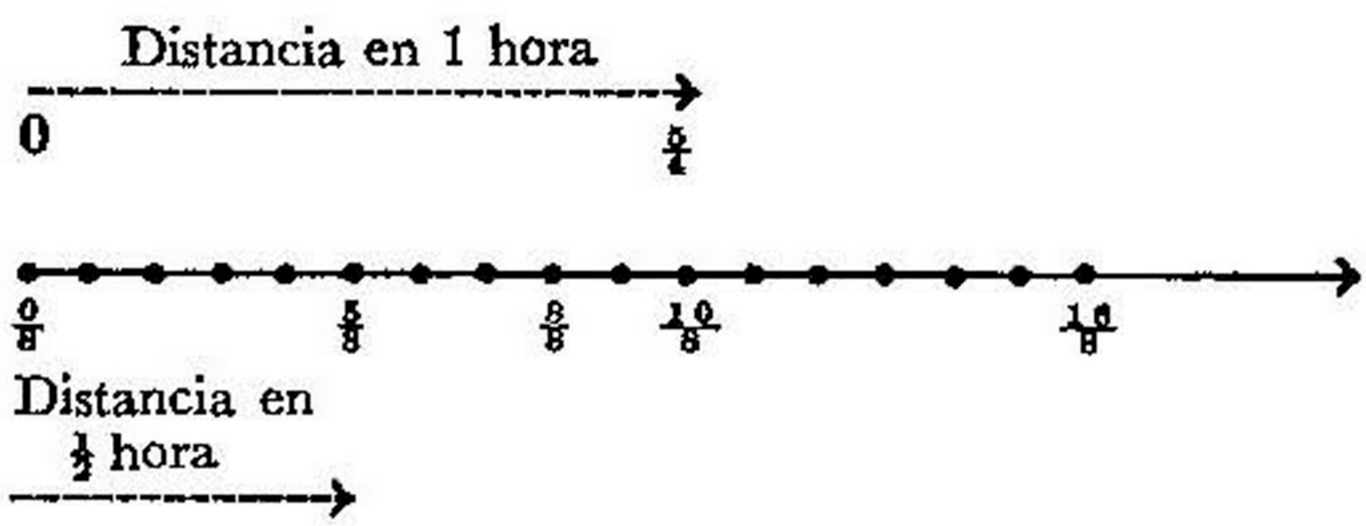


FIGURA 36

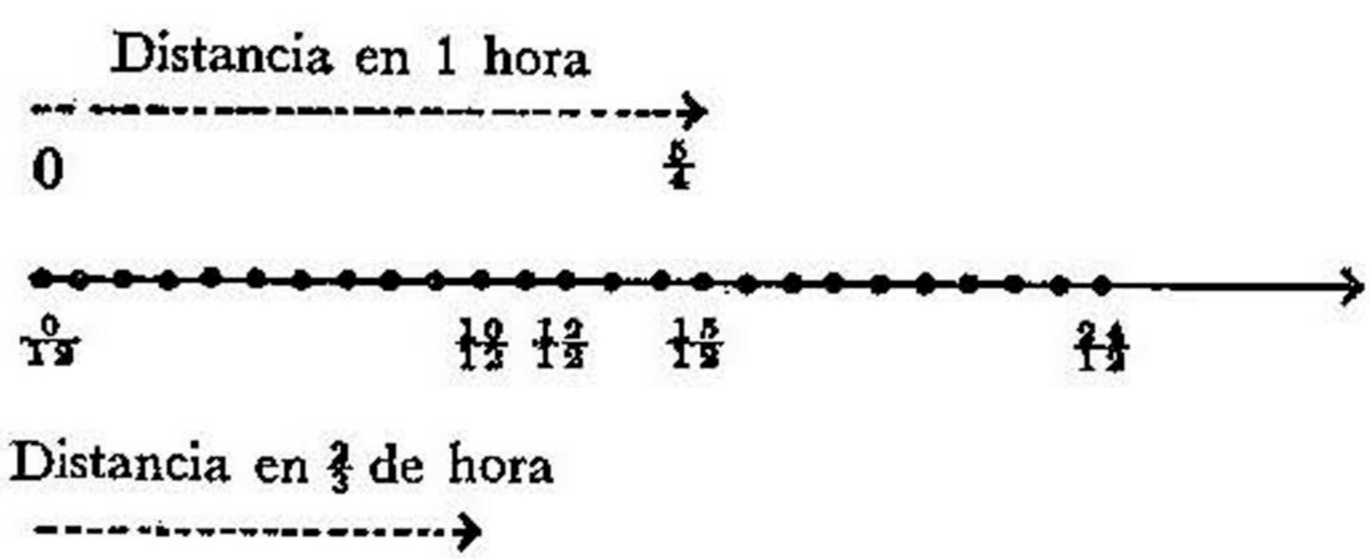
Las líneas punteadas se usan para proyectar los extremos de las flechas sobre el eje numérico en la figura 37 *a*). Es fácil ver que en 2 horas Juan caminó $\frac{10}{4}$ de kilómetro. El punto al que llegó en $\frac{1}{2}$ hora se localiza en medio de los puntos correspondientes a $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$. Si cada una de las cuartas partes de los segmentos unitarios del eje de la figura 37 *a*) se divide en dos partes congruentes (esto significa que el intervalo unitario se dividió, en este caso, en ocho partes congruentes) entonces el punto al que llegó en media hora es uno de los puntos de división, como se ve en el eje de la figura 37 *b*). De hecho, podemos ver que este punto corresponde al número $\frac{5}{8}$; por lo que Juan caminó $\frac{5}{8}$ de kilómetro en $\frac{1}{2}$ hora.



a)



b)



c)

Figura 37

¿Qué número le corresponde al punto al que llegó en $\frac{2}{3}$ de hora?

Este punto se localiza entre los puntos que corresponden a $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{4}$, en el eje de la figura 37 *a*). El eje de la figura 37 *c*) muestra que una de las cuartas partes de los segmentos unitarios del eje de la figura 37 *a*) se dividieron en tres partes congruentes (esto significa que en el caso, el intervalo unitario quedó dividido en 12 partes congruentes), y vemos que el punto al que llegó Juan en $\frac{2}{3}$ de hora corresponde al número $\frac{10}{12}$; por lo que Juan caminó $\frac{10}{12}$ de un kilómetro en $\frac{2}{3}$ de hora.

Ahora, por nuestra noción de lo que debe ser el producto de dos números racionales, podemos escribir

$$2 \times \frac{5}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{10}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{1 \times 5}{2 \times 4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$$

$$= \frac{10}{12}$$

Entonces vemos que el número de kilómetros que Juan caminó en 2 horas, en $\frac{1}{2}$ hora, o en $\frac{2}{3}$ de hora puede expresarse como producto.

Estamos acostumbrados a decir, por ejemplo, que si Juan camina $\frac{5}{4}$ de kilómetro en una hora, entonces en $\frac{1}{2}$ hora caminará la mitad, o $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{4}$ de kilómetro, que es igual a $\frac{5}{8}$ de kilómetro.

Entonces podemos escribir

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{5}{4} = \frac{5}{8},$$

para expresar lo mismo que

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}.$$

De manera semejante

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$

es otra manera de decir que

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$$

Algunas veces parece más natural decir "veces" cuando hablamos acerca del producto de números racionales, y algunas veces parece más natural decir "de", pero en ambos casos expresamos la misma cosa.

Con lo anterior comprendemos lo que es el producto de dos números racionales. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$$

$$= \frac{8}{15}.$$

También hemos visto que esta idea se confirma por la representación de los productos en el eje numérico y que es coherente con resultados que se obtienen en la multiplicación de números enteros (el producto de 3 y 5 cuando se consideran como números racionales es $\frac{3}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{1 \times 1} = \frac{15}{1} = 15$).

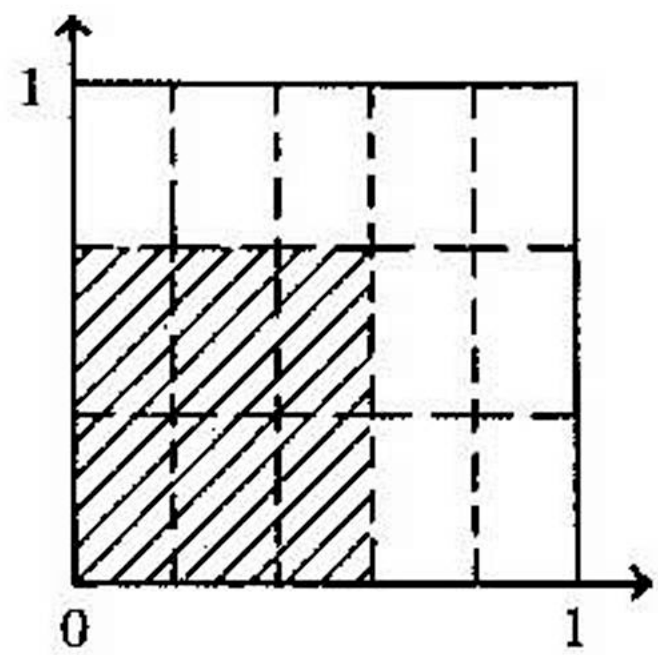
Por tanto, adoptamos la siguiente definición:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales cualesquiera, su producto se define como

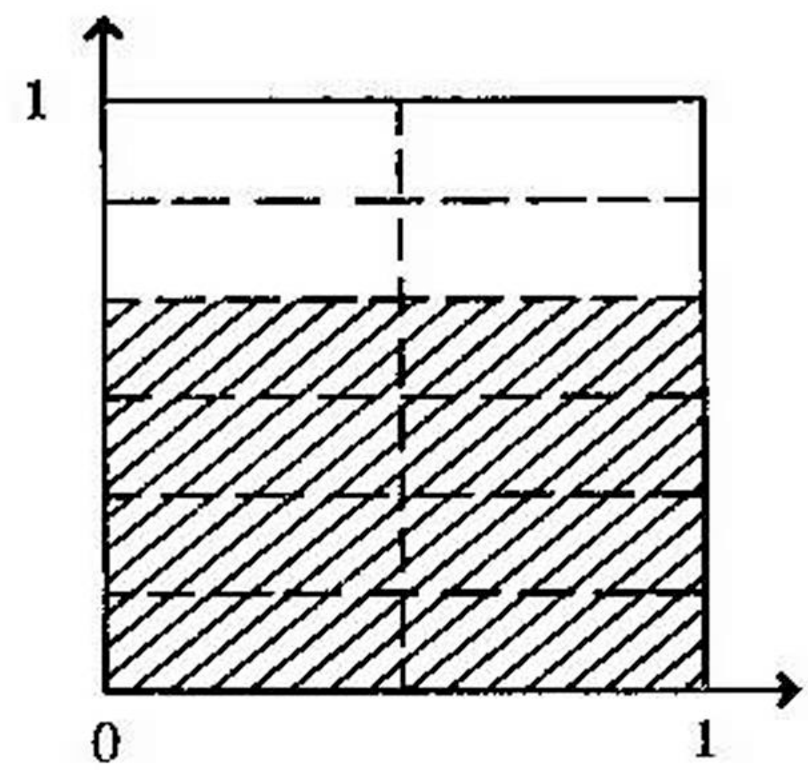
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Grupo de ejercicios 6

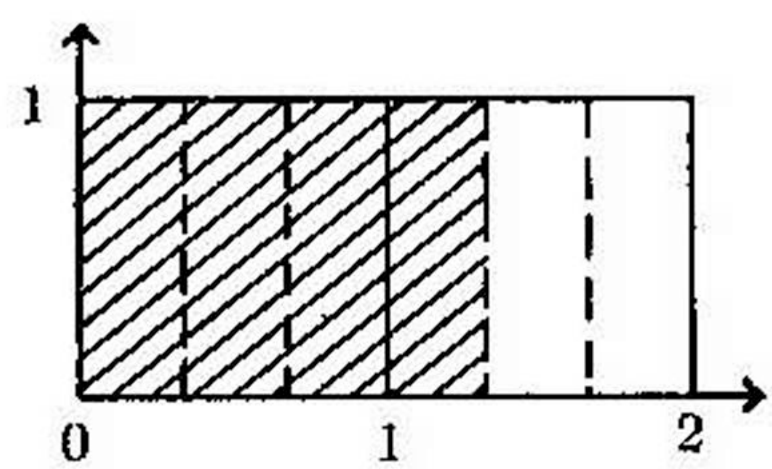
1. Escriba una proposición numérica que exprese el área rayada en cada una de las siguientes regiones unitarias.



a)



b)



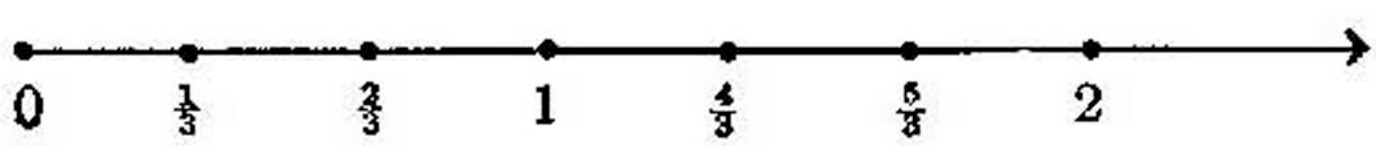
c)

2. Empleando subregiones congruentes, de regiones unitarias, ejemplifique la multiplicación de los siguientes números racionales.

a) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ *b*) $\frac{3}{2} \times \frac{1}{5}$ *c*) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{8}$

3. Aprovechen los ejes numéricos trazados a continuación para ejemplificar *a*) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$; *b*) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}$.

a) 

b) 

4. Representar cada uno de los siguientes productos en un eje numérico.

a) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2} \times \frac{9}{8}$

Propiedades de la multiplicación de los números racionales

En el cuaderno 2, *Números enteros,* se explicaron las siguientes propiedades de la multiplicación de los números enteros, $a, b, c, \ldots,$

$a \times b$ es un número entero	(Propiedad de cerradura de la multiplicación)
$a \times b = b \times a$	(Propiedad conmutativa de la multiplicación)
$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	(Propiedad asociativa de la multiplicación)
$a \times 1 = 1 \times a = a$	(Elemento idéntico de la multiplicación)
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	(Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición)

También se dijo que 0 (el elemento idéntico de la adición) tiene una propiedad especial con respecto a la multiplicación de números enteros:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

Ahora emplearemos las propiedades de los números enteros ya conocidas para comprobar que se cumplen también respecto a los números racionales.

1. *Propiedad de cerradura de la multiplicación.* Por definición, en relación a dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, tenemos

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ahora, por la propiedad de cerradura de la multiplicación de números enteros $a \times c$ y $b \times d$ son números enteros. Además, ya que $b \neq 0$, y $d \neq 0$, tenemos $b \times d \neq 0$. En consecuencia, como se esperaba $\frac{a \times c}{b \times d}$ representa un número racional.

2. *Propiedad conmutativa de la multiplicación.* Por definición, tenemos

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, \qquad \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{d \times b}.$$

Pero por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números enteros tenemos que $a\times c=c\times a$ y $b\times d=d\times b$, por tanto

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{c\times a}{d\times b}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}.$$

3. *Propiedad asociativa de la multiplicación.* Ahora veamos nuestra capacidad para determinar los pasos de la siguiente prueba:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)&=\frac{a}{b}\times\frac{c\times e}{d\times f}\\&=\frac{a\times(c\times e)}{b\times(d\times f)}\\&=\frac{(a\times c)\times e}{(b\times d)\times f}\\&=\frac{a\times c}{b\times d}\times\frac{e}{f}\\&=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}.\end{aligned}$$

4. *Elemento idéntico de la multiplicación.*

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times 1&=\frac{a}{b}\times\frac{1}{1} && \left(\text{ya que } 1=\frac{1}{1}\right)\\&=\frac{a\times 1}{b\times 1} && \text{(definición de la multiplicación de números racionales)}\\&=\frac{a}{b} && \text{(puesto que } a \text{ y } b \text{ son números enteros, } a\times 1=a, \text{ y } b\times 1=b).\end{aligned}$$

De manera semejante puede mostrarse que

$$1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

5. *Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.* Compruébense todos los pasos de la siguiente deducción:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{d}\right)&=\frac{a}{b}\times\frac{c+e}{d}\\&=\frac{a\times(c+e)}{b\times d}\\&=\frac{(a\times c)+(a\times e)}{b\times d}\\&=\left(\frac{a\times c}{b\times d}\right)+\left(\frac{a\times e}{b\times d}\right)\\&=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{d}\right).\end{aligned}$$

Observe cómo resulta ventajoso representar los números racionales por fracciones de igual denominador en la demostración de la validez de la ley distributiva.

6. *Multiplicación por cero.*

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\times 0 &= \frac{a}{b}\times\frac{0}{1}\left(\text{ya que } 0=\frac{0}{1}\right)\\ &=\frac{a\times 0}{b\times 1} \quad \text{(definición de la multiplicación de números racionales)}\\ &=\frac{0}{b}\\ &=0. \quad (\text{puesto que } a \text{ es un número entero, } a\times 0=0)\end{aligned}$$

Del mismo modo podemos demostrar que

$$0\times\frac{a}{b}=0.$$

En nuestros cálculos de la vida diaria empleamos estas propiedades de la multiplicación de números racionales, como las propiedades de la adición de los mismos números; pero habitualmente es difícil darse cuenta de que en realidad esto debe hacerse así. Entonces, por ejemplo, de ordinario escribimos

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f} \text{ para significar } \left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}$$

porque este triple producto debe tener un significado (pues la multiplicación básicamente se define como una operación con sólo dos números), pero por la ley asociativa de la multiplicación obtenemos el mismo resultado si el significado del primer producto lo tomamos como:

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right),$$

por lo que ordinariamente omitimos el paréntesis.

Además de las seis propiedades vistas aquí, los números racionales tienen una propiedad adicional, que no tienen los números enteros.

Propiedades del multiplicativo inverso de los números racionales

Observe cada uno de los siguientes productos.

a) $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{5\times 7}{7\times 5}=1$ *b*) $\frac{4}{9}\times\frac{9}{4}=\frac{4\times 9}{9\times 4}=1$ *c*) $\frac{4}{1}\times\frac{1}{4}=\frac{4\times 1}{1\times 4}=1$

En cada caso el producto de los factores es 1. ¿Por qué? Cuando los numeradores de las fracciones $\frac{5}{7}$ y $\frac{7}{5}$ se multiplican, el producto es 5×7 y cuando se multiplican los denominadores de estas fracciones el producto es 7×5. Pero por la propiedad conmutativa de la multiplicación $5\times 7=7\times 5$, y por tanto tenemos $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=1$.

Si el producto de dos números es 1, cada número se llama *recíproco* o multiplicativo inverso del otro número. Entonces $\frac{5}{7}$ es el recíproco de $\frac{7}{5}$, y $\frac{7}{5}$ es el recíproco de $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{9}$ es el recíproco de $\frac{9}{4}$, y $\frac{9}{4}$ es el recíproco de $\frac{4}{9}$; 4 es el recíproco de $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{4}$ es el recíproco de 4.

A cualquier número racional, excepto 0, corresponde otro número racional, tal que el producto de ambos da 1. Entonces, cada uno de estos números se llama el recíproco o multiplicativo inverso del otro.

Los números 0 y 1 tienen propiedades especiales en la matemática. Una de estas propiedades es que, para cualquier número n,

$$0\times n=0.$$

Puesto que no hay número racional n tal que $0\times n=1$; el número 0 no tiene recíproco.

Observe además que

$$1\times 1=1.$$

El número 1 es el único número racional no negativo que es su propio multiplicativo inverso. También es el único número entero cuyo multiplicativo inverso es además un número entero.

La propiedad del recíproco, también llamada del multiplicativo inverso, es una propiedad que no poseen los números enteros, pero sí la poseen los números racionales. Todo número racional, excepto 0, tiene un recíproco que también es un número racional. Entonces, para todo número racional a, $a\neq 0$, existe otro número racional b tal que

$$a\times b=1.$$

Grupo de ejercicios 7

1. Para cada proposición numérica, encuentre el número n de tal manera que se satisfaga la proposición

a) $\frac{5}{6} \times n = 1$

b) $\frac{7}{13} \times n = 1$

c) $4 \times n = 1$

d) $1 \times n = 1$

e) $\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right) = n$

f) $n \times \left(\frac{6}{7} \times \frac{7}{6}\right) = \frac{3}{8}$

2. Obtenga los recíprocos de los siguientes números:

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{4}{5}$

d) 1

e) 6

f) $\frac{5}{2}$

3. A continuación se dan algunas proposiciones de división. Para cada una de ellas escriba una proposición de multiplicación que exprese la misma relación.

Ejemplo: $35 \div n = 7$
$n \times 7 = 35$

a) $36 \div n = 3$

b) $24 \div 8 = n$

c) $17 \div n = 17$

d) $n \div \frac{3}{5} = \frac{5}{6}$

e) $1 \div 11 = n$

4. Para cada proposición de multiplicación de las que se dan a continuación, obtenga dos proposiciones de división que expresen la misma relación:

Ejemplo: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$

$1 \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$

$1 \div \frac{5}{3} = \frac{3}{5}$

a) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$

b) $\frac{16}{3} \times \frac{3}{16} = 1$

c) $\frac{7}{18} \times \frac{18}{7} = 1$

d) $\frac{41}{9} \times \frac{9}{41} = 1$

5. Complete la siguiente secuencia de proposiciones equivalentes:

$$\frac{3}{4} \times n = \frac{2}{5}$$

a) $\frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{4} \times n\right) = \_\_\_\_\_ \times \frac{2}{5}$

b) $\left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times n = \_\_\_\_\_ \times \frac{2}{5}$

c) $\_\_\_\_\_ \times n = \_\_\_\_\_ \times \frac{2}{5}$

d) $n = \_\_\_\_\_ \times \frac{2}{5}$ ó $\_\_\_\_\_$

6. Complete cada una de las siguientes proposiciones

$$\frac{5}{4} \div \frac{3}{7} = n$$

a) $n \times \_\_\_\_\_ = \frac{5}{4}$

b) $n \times 1 = n \times \left(\frac{3}{7} \times \_\_\_\_\_\right)$

c) $\left(n \times \frac{3}{7}\right) \times \_\_\_\_\_ = \frac{5}{4} \times \_\_\_\_\_$ (el mismo número en ambos espacios)

d) $n \times 1 = \_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_$

e) $n = \_\_\_\_\_$

f) $\frac{5}{4} \div \frac{3}{7} = \_\_\_\_\_$

7. Complete cada proposición de manera que sea equivalente a la proposición dada

$$\frac{8}{5} \div n = \frac{16}{15}$$

a) $n \times \_\_\_\_\_ = \frac{8}{5}$

b) $\left(n \times \frac{16}{15}\right) \times \_\_\_\_\_ = \frac{8}{5} \times \_\_\_\_\_$ (el mismo número en ambos espacios)

c) $n \times 1 = \frac{8}{5} \times \_\_\_\_\_$

d) $n = \frac{8}{5} \times \_\_\_\_\_$

e) $n=$_____

f) $\frac{8}{5} \div$_____ $\frac{16}{15}$

División de números racionales

Así como la operación de restar es la inversa de la operación de sumar la operación de dividir es la inversa de la operación de multiplicar. En el cuaderno 2: *Números enteros,* dijimos que 6 dividido entre 3 es igual a 2 porque 3 veces 2 es 6:

$$6 \div 3 = 2 \quad \text{porque} \quad 3 \times 2 = 6.$$

Además se dijo que en el sistema de números enteros algunos pares de números no tenían como cociente otro número entero. Por lo que, vimos que en el sistema de números enteros la división $20 \div 3$ es imposible; esto es, no hay ningún número entero n tal que

$$3 \times n = 20.$$

En el sistema de los números racionales, se define nuevamente a la operación de división como la inversa de la operación de multiplicación. Entonces la ecuación $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{e}{f}$; significa $\frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{e}{f}$ de manera más general la proposición de división $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ significa

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}.$$

Como veremos en el sistema de los números racionales, la división (excepto entre 0) siempre es posible.

En cuanto a la definición de dividir números racionales es básica la noción de recíprocos. Recuerde que dos números racionales son recíprocos, cada uno del otro, si su producto es 1. Por ejemplo, 2 y $\frac{1}{2}$, 1 y 1, y $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son pares recíprocos, ya que $2 \times \frac{1}{2} = 1$, $1 \times 1 = 1$, y $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$. En general, números racionales $\frac{c}{d}$ y $\frac{d}{c}$, donde ni c ni d son 0, son recíprocos cada uno del otro, ya que

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{c \times d}{d \times c} = \frac{c \times d}{c \times d} = 1.$$

Ahora consideremos la división $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$. Suponiendo que hay un número racional n tal que $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = n$ ¿cómo podemos obtener n?

Recuerde que $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = n$ significa que:

$$\frac{2}{5} \times n = \frac{3}{4}.$$

El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$ porque $\frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$. Multiplicando tanto $\frac{2}{5} \times n$ como $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{2}$ obtenemos

$$\frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{5} \times n\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4},$$

$$\left(\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}\right) \times n = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}, \qquad \text{(propiedad asociativa de la multiplicación)}$$

$$1 \times n = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}, \qquad \left(\frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1\right)$$

$$1 \times n = \frac{5 \times 3}{2 \times 4}, \qquad \text{(definición de la multiplicación)}$$

$$n = \frac{15}{8}. \qquad \left(1 \times n = n \text{ y } \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8}\right)$$

Hasta aquí hemos demostrado que si hay un número racional n tal que $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = n$ entonces $n = \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$. ¿Podemos demostrar que $\frac{15}{8}$ es el resultado correcto? Esto es, ¿podemos demostrar que $\frac{2}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{3}{4}$? Por la definición de la multiplicación de números racionales

$$\frac{2}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{2 \times 15}{5 \times 8}$$

$$= \frac{30}{40}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

Por tanto, solamente hay un número racional n de modo que satisfaga $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = n$ dicho número es $\frac{15}{8}$.

Si se observan los pasos, de atrás hacia adelante, se verá que $\frac{15}{8}$ se obtuvo mediante la multiplicación de $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{2}$, que es el recíproco de $\frac{2}{5}$, y puede escribirse entonces.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}.$$

¿Cómo podría interpretarse $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ en el eje numérico? Esto es, ¿podemos encontrar un número racional $\frac{a}{b}$, tal que $\frac{a}{b} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$, empleando la recta numérica?

Si se localizan los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ en el eje numérico, véase la figura 38 *a*), es evidente que necesitamos un conjunto de subintervalos tales que los puntos de separación incluyan los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

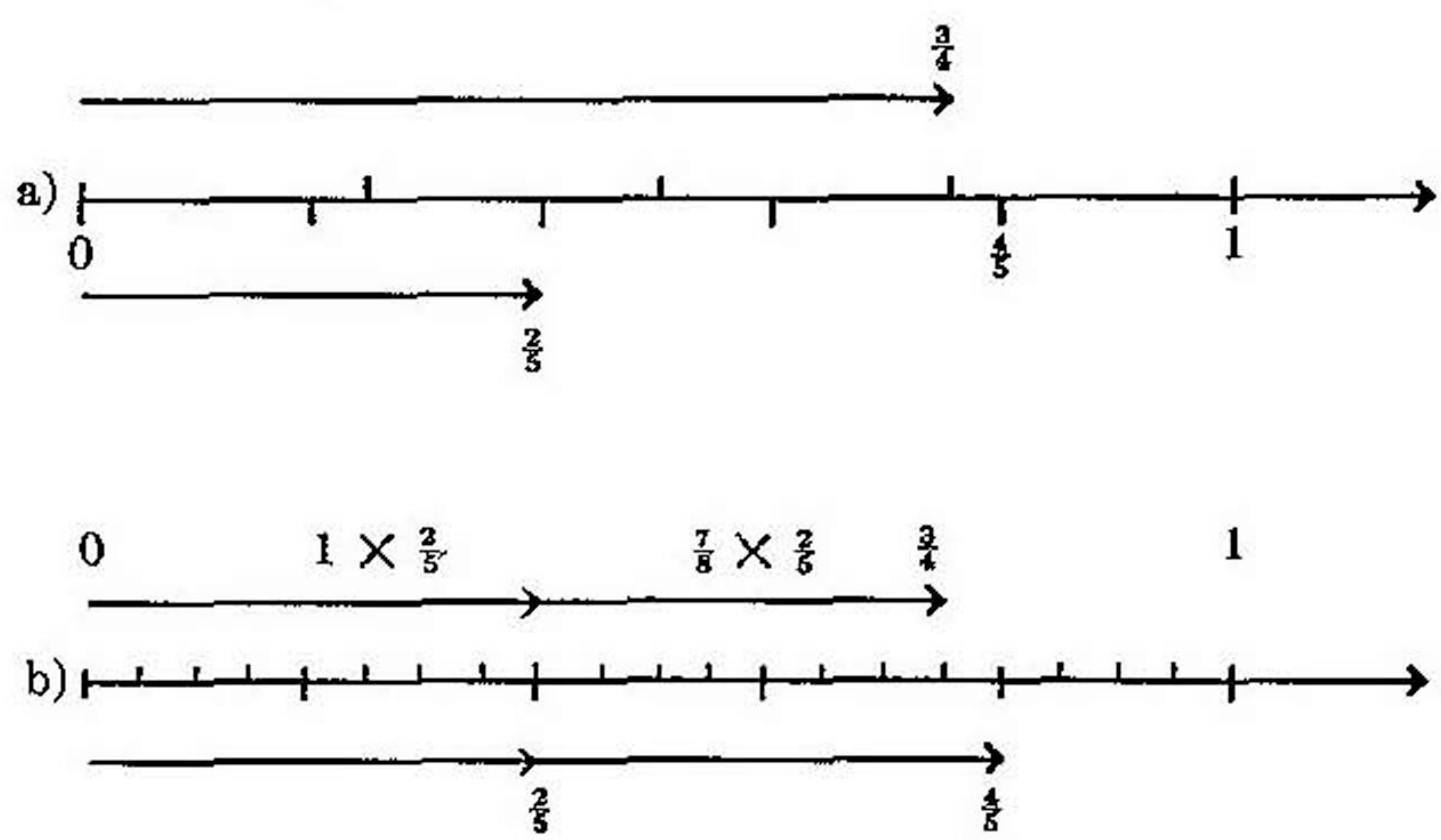


FIGURA 38

Esto puede lograrse dividiendo el eje en segmentos unitarios (partiendo de 0 y continuando con la serie tanto como se necesite) en 20 partes congruentes, véase la figura 38 *b*). La recta *b*) sugiere que

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5}.$$

Ahora dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ que son dos números racionales cualesquiera y $\frac{c}{d} \neq 0$ (esto significa que $c \neq 0$). De la misma manera que la que se empleó para la división de $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ puede demostrarse que hay exactamente un número racional $\frac{x}{y}$ tal que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y},$$

que puede expresarse como:

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Entonces, tenemos para ese caso general

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Entonces, *dividir entre un número racional (diferente de 0) da el mismo resultado que multiplicar por su recíproco.*

En el sistema de los racionales, puede verse que la división entre 0 es imposible, si tomamos en cuenta que son válidas las mismas razones por las que es imposible en el sistema de los números enteros. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \div 0 = n$$

implica que $0 \times n = \frac{3}{4}$; puesto que el producto de 0 por cualquier número racional es 0, no existe un número racional n tal que $0 \times n = \frac{3}{4}$; y en consecuencia no hay ningún número racional n tal que $\frac{3}{4} \div 0 = n$.

Las fracciones como símbolos de la división

Mientras que la división de 20 entre 3 es imposible en el sistema de los números enteros, el número racional 20 dividido entre el número racional 3 da por resultado un número racional. De la definición de división de números racionales, advertimos claramente que el resultado de dividir cualquier número racional entre otro del mismo sistema, excepto cero, es un número racional. Por esta definición tenemos,

$$\begin{aligned}20 \div 3 &= \frac{20}{1} \div \frac{3}{1}\\ &= \frac{20}{1} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{20 \times 1}{1 \times 3}\\ &= \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

En forma general, si p es cualquier número entero y q es cualquier número entero diferente de cero, entonces

$$\begin{aligned}p \div q &= \frac{p}{1} \div \frac{q}{1}\\ &= \frac{p}{1} \times \frac{1}{q}\\ &= \frac{p \times 1}{1 \times q}\\ &= \frac{p}{q}.\end{aligned}$$

Entonces, si p y q son números enteros $q \neq 0$, $p \div q$ y $\frac{p}{q}$ son expresiones del mismo número racional. Esto significa que una fracción tal como $\frac{3}{4}$, por ejemplo, no sólo puede considerarse como expresión de un número racional, sino como cociente de números enteros; en este caso $3 \div 4$. Puede, entonces, decirse "el número racional $7 \div 5$" en lugar de "el número racional $\frac{7}{5}$". ¿Qué podemos decir acerca del cociente, $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7}$? ¿Podemos escribirlo de la manera siguiente?

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$$

Recuerde que las fracciones, empleadas aquí, son expresiones de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q representan números enteros, en que $q \neq 0$. Suponga que ampliamos nuestro concepto de fracción para considerar expresiones tales como $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$ y, en general $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ donde $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

Estas nuevas fracciones de la forma $\frac{r}{s}$ donde el numerador r es un número racional y el denominador s es un número racional diferente de cero, ¿tendrán las mismas propiedades de las fracciones que hemos manejado?

La respuesta a la pregunta anterior es sí; aplicando las mismas reglas aprendidas para trabajar con fracciones tales como $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5}$ podemos operar con estas nuevas fracciones tales como $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5}$. Por medio de ejemplos se prueba que los siguientes enunciados son verdaderos.

a) $\dfrac{m \times r}{m \times s} = \dfrac{r}{s}$, donde m, r y s son números racionales con $m \neq 0$ y $s \neq 0$.

b) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$, donde a, b, c y d son números racionales con $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Para comprobar el enunciado *a*), veamos que

$$\frac{\frac{3}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}.$$

Por la definición de multiplicación y la de división de números racionales

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} &= \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{8}} \\
&= \frac{6}{10} \div \frac{9}{8} \\
&= \frac{6}{10} \times \frac{8}{9} \\
&= \frac{48}{90} \\
&= \frac{48 \div 6}{90 \div 6} \\
&= \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Obtengamos ahora la expresión más simple de $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{15}.$$

Por tanto, hemos demostrado lo que se deseaba.

Con las expresiones que siguen comprobemos que el enunciado *b*)

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}$$

es verdadero. Lo que podremos demostrar después de obtenerse las expresiones más simples de $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}}$ y $\frac{\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}$.

Para la primera expresión tenemos

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}} = \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{4}{7} \div \frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{1}\right) \times \left(\frac{4}{7} \times \frac{5}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{20}{21}$$

$$= \frac{4 \times 20}{3 \times 21}$$

$$= \frac{80}{63}.$$

Para la segunda expresión tenemos

$$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}=\frac{\frac{8}{21}}{\frac{3}{10}}$$

$$=\frac{8}{21}\div\frac{3}{10}$$

$$=\frac{8}{21}\times\frac{10}{3}$$

$$=\frac{80}{63}.$$

Por lo anterior vemos que realmente hay igualdad.

También es posible demostrar que los otros procedimientos, empleados para trabajar con números racionales expresados por fracciones, cuyo numerador y denominador son números enteros, pueden emplearse cuando las fracciones tienen números racionales como numerador y denominador.

El enunciado *a*) demostrado en la página 74 a veces se emplea como base de otro procedimiento para obtener el cociente de dos números racionales. Por ejemplo:

$$\frac{5}{8}\div\frac{3}{4}=n,$$

$$n=\frac{5}{8}\div\frac{3}{4}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}\times\frac{8}{1}}{\frac{3}{4}\times\frac{8}{1}}$$

$$=\frac{\frac{40}{8}}{\frac{24}{4}},$$

$$n=\frac{5}{6}.$$

Grupo de ejercicios 8

1. Demuestre que $\frac{15}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{15}{7} \times \frac{3}{2}$, llenando los espacios blancos con los números apropiados

$$\frac{15}{7} \div \frac{2}{3} = n$$

$$\frac{15}{7} = n \times \frac{2}{3}$$

a) $\frac{15}{7} \times$ _____ $= \left(n \times \frac{2}{3}\right) \times$ ____ (el mismo número en ambos espacios)

b) $\frac{15}{7} \times$ _____ $= n \times \left(\frac{2}{3} \times \right.$ ____ $\left.\right)$ (los mismos números que el anterior)

c) $\frac{15}{7} \times$ _____ $= n \times 1$

d) $\frac{15}{7} \times$ _____ $= n$

e) $\frac{15}{7} \times$ _____ $= \frac{15}{7} \div \frac{2}{3}$

2. Empleando el método para dividir números racionales, demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es verdadero.

a) $15 \div 8 = \frac{15}{8}$

b) $3 \div 10 = \frac{3}{10}$

c) $2\,586 \div 450 = \frac{2\,586}{450}$

d) $2 \div 3 = \frac{2}{3}$

3. Complete cada enunciado de tal manera que se obtenga una proposición verdadera.

a) Una propiedad de los números racionales, que no tienen los números enteros, es que todo número racional (excepto _______) tienen un _______.

b) El producto de un número racional no negativo y su _______ es _______.

c) El único número racional no negativo que es su propio _______ es _______.

4. Encuentre la expresión más simple para $\dfrac{\frac{21}{40}}{\frac{13}{60}}$, empleando los siguientes métodos:

a) Por el proceso de división para obtener $\frac{21}{40} \div \frac{13}{60}$.

b) Por la propiedad $\dfrac{m \times \frac{a}{b}}{m \times \frac{c}{d}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. (Cuando $m = 120$.)

Sumario

Un número racional es una abstracción (como lo es un número entero), que puede considerarse como la división de una región unitaria en un número natural de subregiones congruentes de las que se toma un número entero. También pueden emplearse como medios de ilustración en lugar de regiones unitarias las siguientes: un intervalo unitario en el eje numérico, dividido en subintervalos congruentes, o un conjunto de objetos descritos, agrupados en subconjuntos equivalentes.

Una fracción, $\frac{a}{b}$, donde b representa el número de subregiones congruentes (o subintervalos congruentes, o subconjuntos equivalentes) y donde a representa el número total de subregiones, subintervalos o subconjuntos considerados, es un numeral que expresa un número racional. El número a es el numerador de la fracción, y el número b es el denominador de la misma.

Un número racional puede expresarse mediante un número infinito de fracciones (llamadas fracciones equivalentes) debido a que: $\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$ en donde m es un número natural. En consecuencia, dos números racionales cualesquiera siempre pueden expresarse mediante fracciones que tengan el denominador común.

Los números racionales están ordenados (o sea, el conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado). Para dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

siempre que

$$a\times d<b\times c, \quad a\times d=b\times c, \quad \text{ó} \quad a\times d>b\times c.$$

respectivamente.

Puede considerarse el conjunto de números enteros como un subconjunto propio del conjunto de los números racionales.

También se definieron las operaciones con números racionales de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}, \text{ si } c \text{ no es mayor que } a,$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d},$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c},$$

Las definiciones para adición y sustracción

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},$$

si bc no es mayor que ad.

Además se definió la sustracción y la división como las operaciones inversas de la adición y de la multiplicación respectivamente. Las operaciones con números racionales tienen las mismas propiedades que las operaciones con números enteros.

El conjunto de los números racionales es cerrado respecto a la división (excepto la división entre cero), cosa que no es cierta en el conjunto de los números enteros.

El símbolo de fracciones $\frac{a}{b}$ puede emplearse también, como símbolo para la división $a\div b$ (siendo a y b números enteros $b\neq 0$). De manera semejante $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, puede emplearse como símbolo propio de $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$; y en este caso cumplen también las leyes para ejecutar cálculos mediante fracciones. Además, ya que el conjunto de los racionales es cerrado con respecto a la división, entonces $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ (donde b, c, $d \neq 0$) es una expresión para un número racional.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

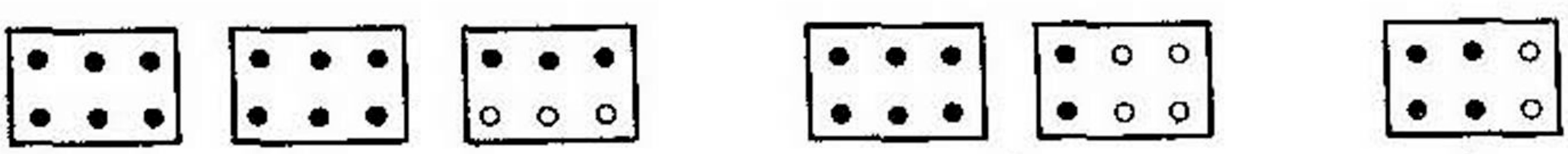
Grupo de ejercicios 1

1. *a*) (1, 5)
   b) (3, 4)
   c) (4, 3)
   d) (5, 16)

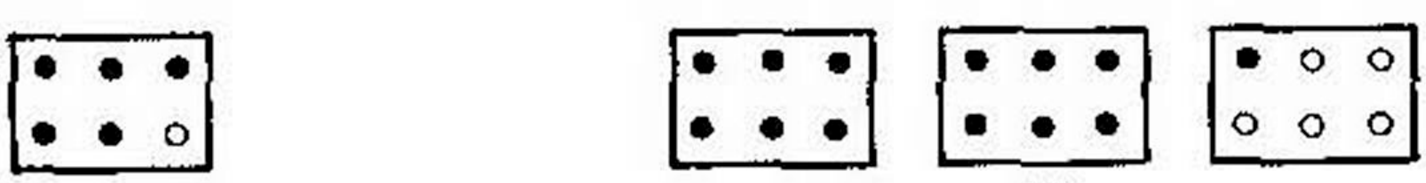
2. *a*) (4, 5)
   b) (1, 4)
   c) (2, 3)
   d) (11, 16)

3. *a*) Cada segmento unitario del eje numérico se divide en siete segmentos congruentes; $\frac{0}{7}$ corresponde al extremo izquierdo del primer segmento unitario. Esto significa que se está considerando (se está tomando) un conjunto de segmentos congruentes con ningún segmento congruente.
   b) Una región unitaria se divide en nueve subregiones congruentes, y se toman cinco de estas subregiones.
   c) Es imposible que si se tienen 0 objetos discretos, se consideren 9 de ellos.

4.

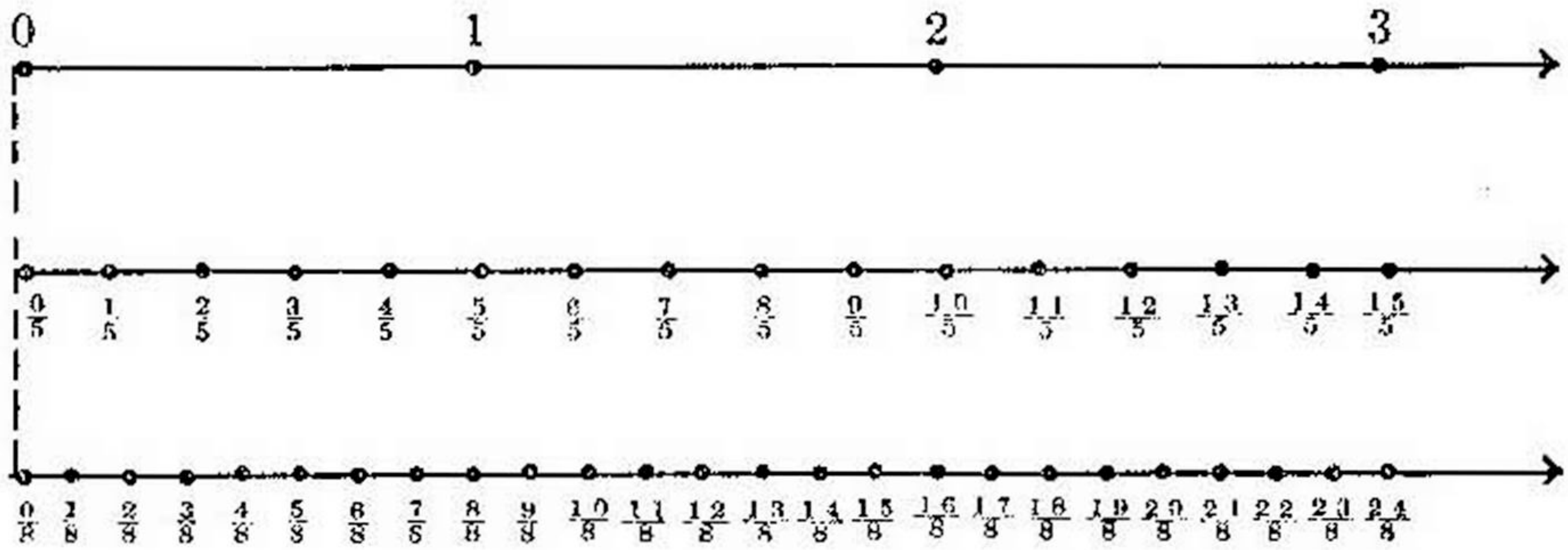


$\frac{15}{6}$ $\quad$ $\frac{8}{6}$ $\quad$ $\frac{4}{6}$



$\frac{13}{6}$

5.



Grupo de ejercicios 2

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{4}{6}$

3. *a*) 2 *b*) Sí *c*) Sí

4. *a*) $5+7$ *b*) 7×7 *c*) 7 *d*) $\frac{5}{7}$

5. $\frac{12}{52}=\frac{4\times3}{4\times13}=\frac{3}{13}$

$\frac{30}{130}=\frac{3\times10}{13\times10}=\frac{3}{13}$

$\frac{3}{13}=\frac{3}{13}$

Grupo de ejercicios 3

1. Ejemplo

2. $\frac{28}{3}=\frac{28\times4}{3\times4}=\frac{112}{3\times4}$

$\frac{30}{4}=\frac{30\times3}{4\times3}=\frac{90}{4\times3}$

$\frac{28}{3}>\frac{30}{4}$

3. $\frac{17}{20}=\frac{17\times 19}{20\times 19}=\frac{323}{20\times 19}$

$\frac{15}{19}=\frac{15\times 20}{19\times 20}=\frac{300}{19\times 20}$

$\frac{17}{20}>\frac{15}{19}$

4. $\frac{9}{13}=\frac{9\times 11}{13\times 11}=\frac{99}{11\times 13}$

$\frac{8}{11}=\frac{8\times 13}{11\times 13}=\frac{104}{11\times 13}$

$\frac{9}{13}<\frac{8}{11}$

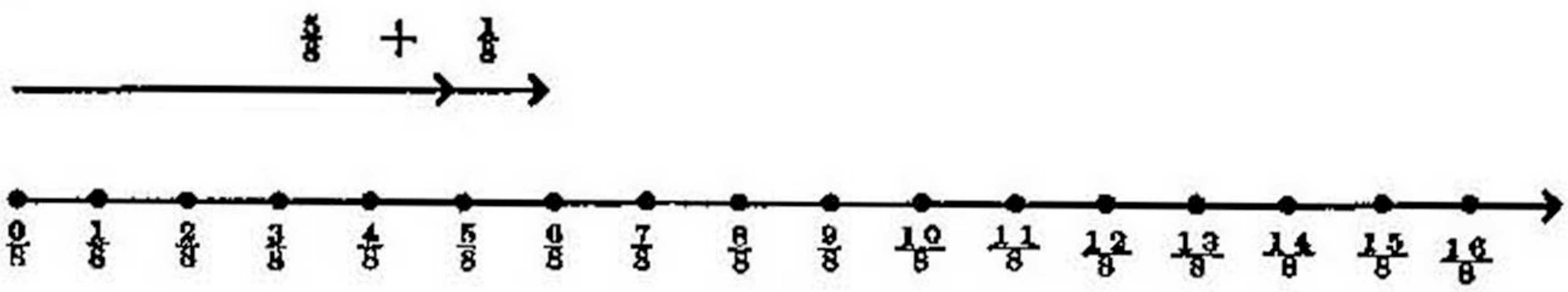
Grupo de ejercicios 4

1. *a*) Propiedad asociativa de la adición.
   b) Propiedad conmutativa de la adición.
   c) Propiedad asociativa de la adición.
   d) Definición de adición de números racionales.
   e) Fracciones equivalentes.
   f) Definición de adición de números racionales.

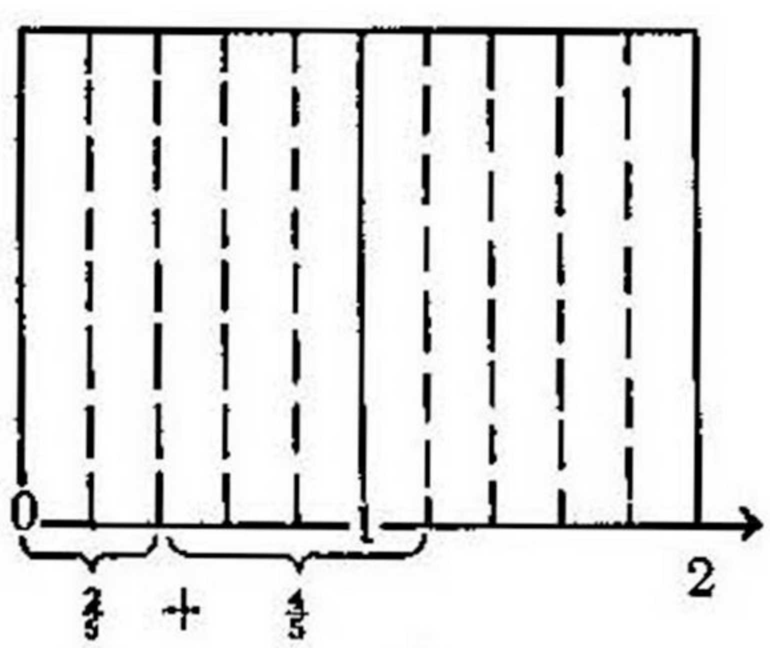
2. *a*) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+5+\frac{1}{7}+\frac{5}{7}=\frac{6}{3}+5+\frac{6}{7}=2+5+\frac{18}{21}=\frac{14}{7}+\frac{35}{7}+\frac{6}{7}=\frac{55}{7}$

   b) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+4=\frac{6}{3}+\frac{4}{5}+4=2+4+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}+\frac{20}{5}+\frac{4}{5}=\frac{34}{5}$

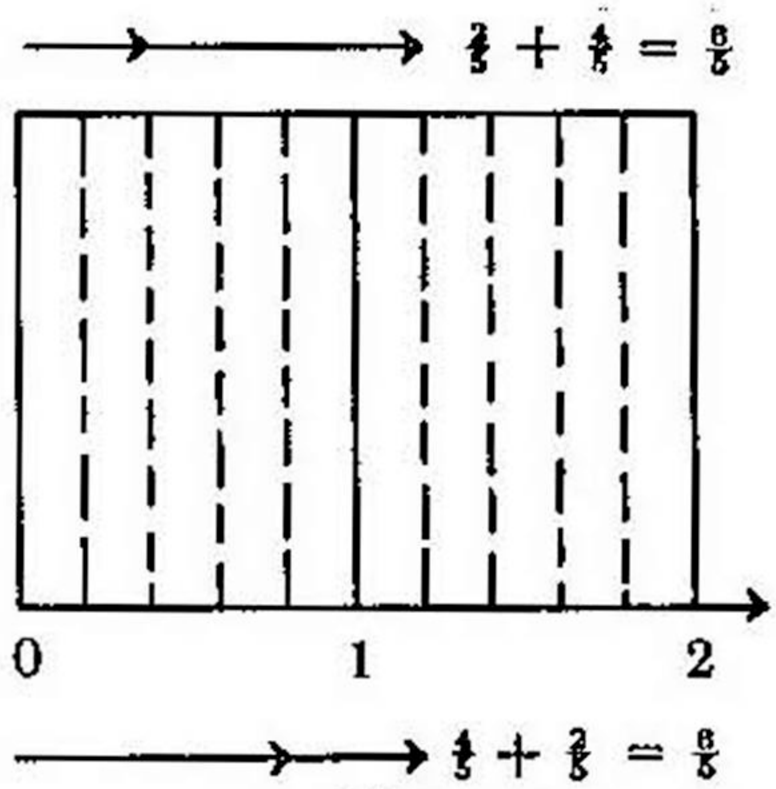
3.



4.

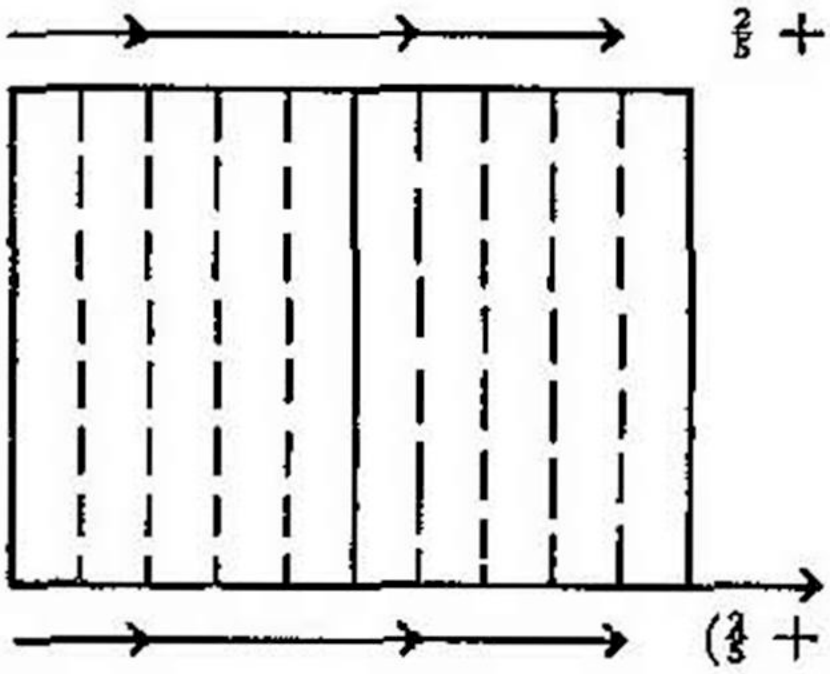


a)



b)

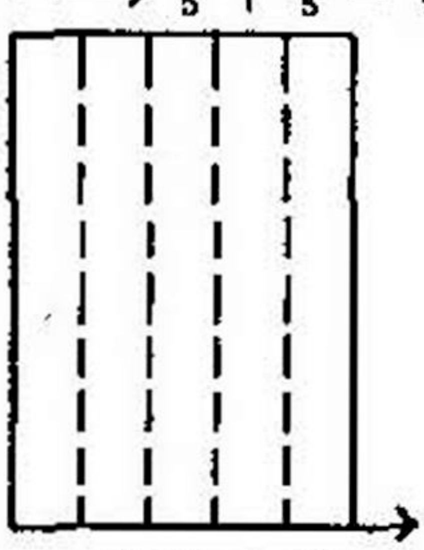
$\frac{2}{5} + (\frac{4}{5} + \frac{3}{5}) = \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5}$



$(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}) + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

c)

$\frac{0}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$



d)

$\frac{2}{5} + \frac{0}{5} = \frac{2}{5}$

Grupo de ejercicios 5

1. *a*) $\frac{9}{12}, \frac{8}{12}$ y $\frac{10}{12}$

   b) $\frac{15}{51}, \frac{23}{51}$

   c) $\frac{50}{20}, \frac{35}{20}, \frac{44}{20}$

   d) $\frac{54}{42}, \frac{26}{42}, \frac{19}{42}$

2. *a*)
$$\begin{array}{r} \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \\ -\ \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \\ \hline \frac{5}{6} \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{r} \frac{43}{13} = \frac{172}{56} \\ \frac{13}{8} = \frac{91}{56} \\ \hline \frac{81}{56} \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{r} \frac{33}{5} = \frac{132}{20} \\ \frac{57}{20} = \frac{57}{20} \\ \hline \frac{75}{20} = \frac{15}{4} \end{array}$$

   d)
$$\begin{array}{r} \frac{59}{7} = \frac{295}{35} \\ \frac{144}{35} = \frac{144}{35} \\ \hline \frac{151}{35} \end{array}$$

$e)\quad \dfrac{26}{2}=\dfrac{104}{8}$

$\dfrac{21}{8}=\dfrac{21}{8}$

$\dfrac{83}{8}$

$f)\quad \dfrac{5}{4}=\dfrac{25}{20}$

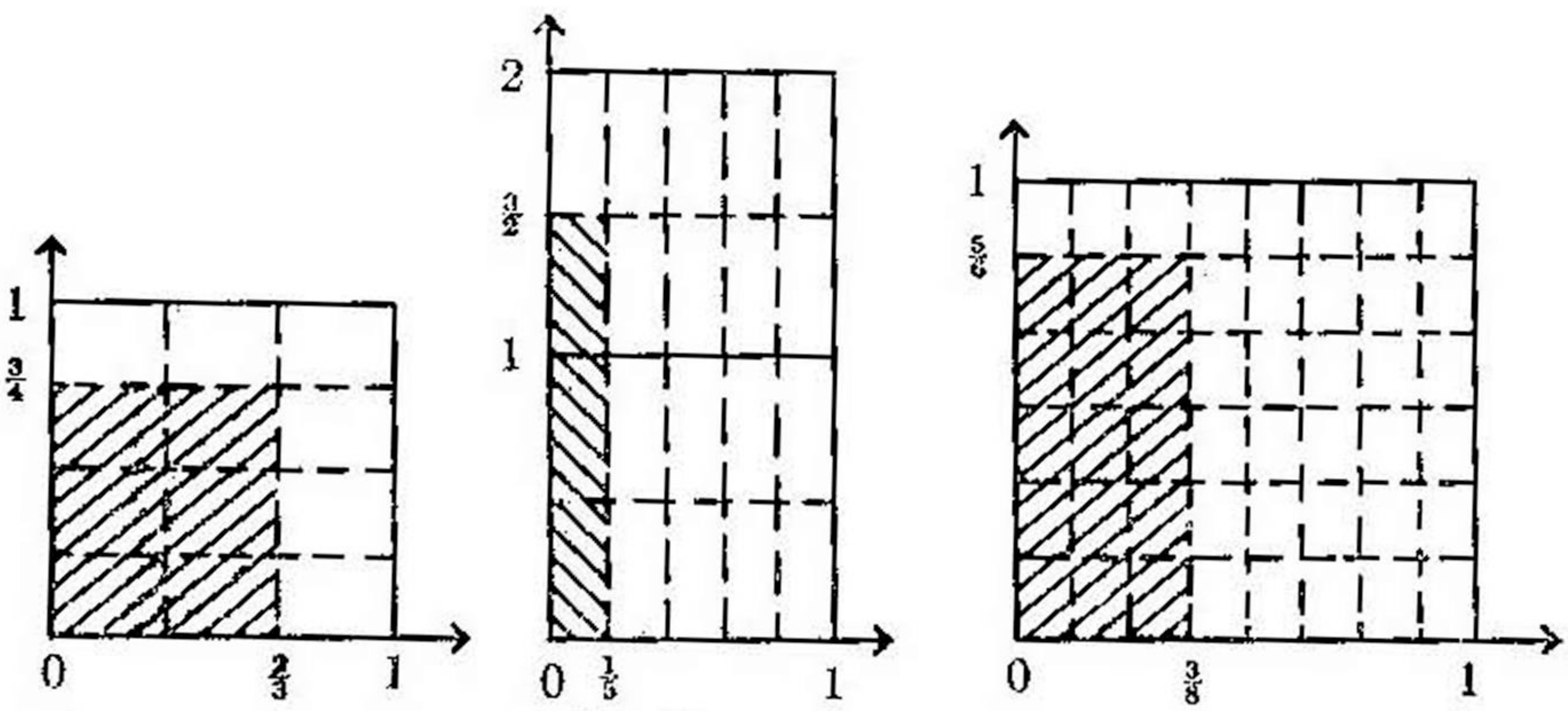
$\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{20}$

$\dfrac{9}{20}$

Grupo de ejercicios 6

1. $a)\ \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{15}$ $\qquad b)\ \dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{2}=\dfrac{8}{12}$ $\qquad c)\ \dfrac{2}{2}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{6}$

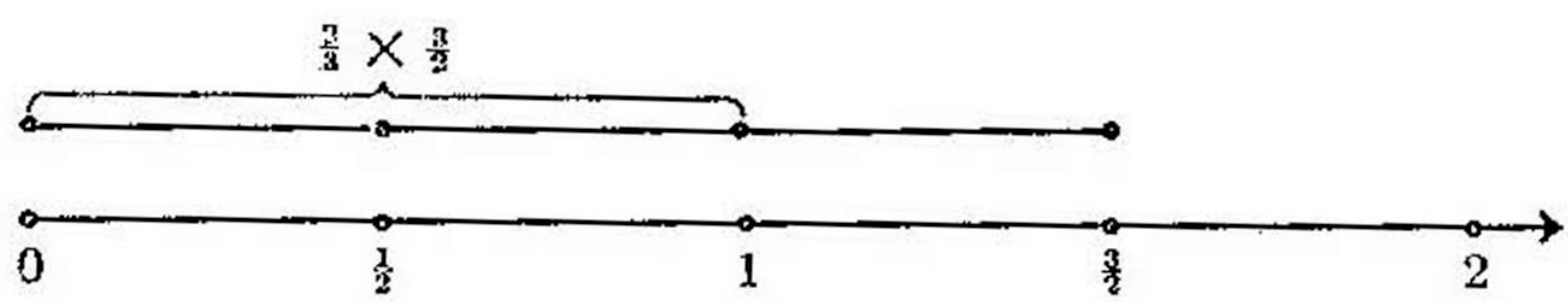
2.



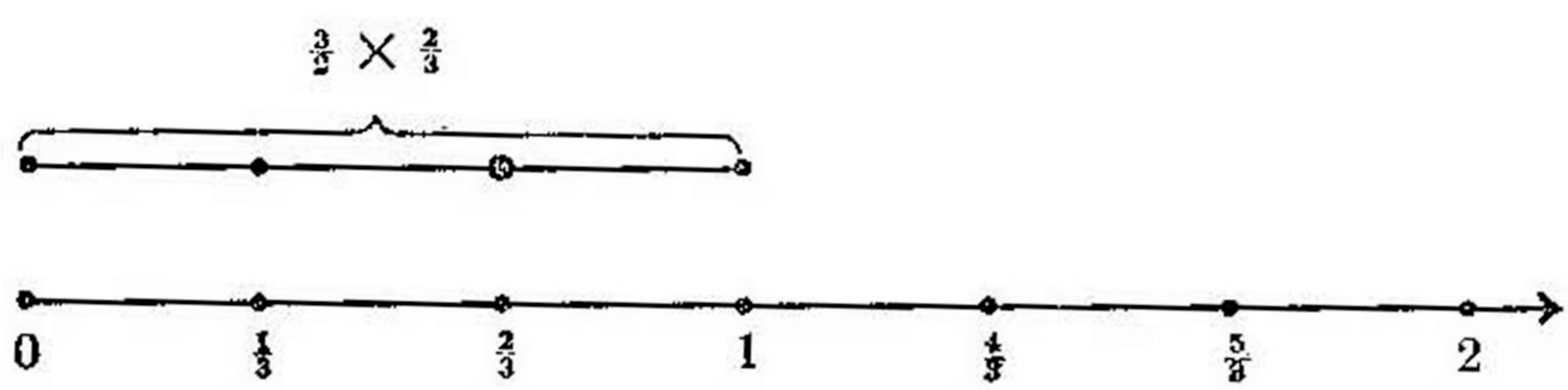
$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$ $\qquad \frac{3}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$ $\qquad \frac{5}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{48}$

3.

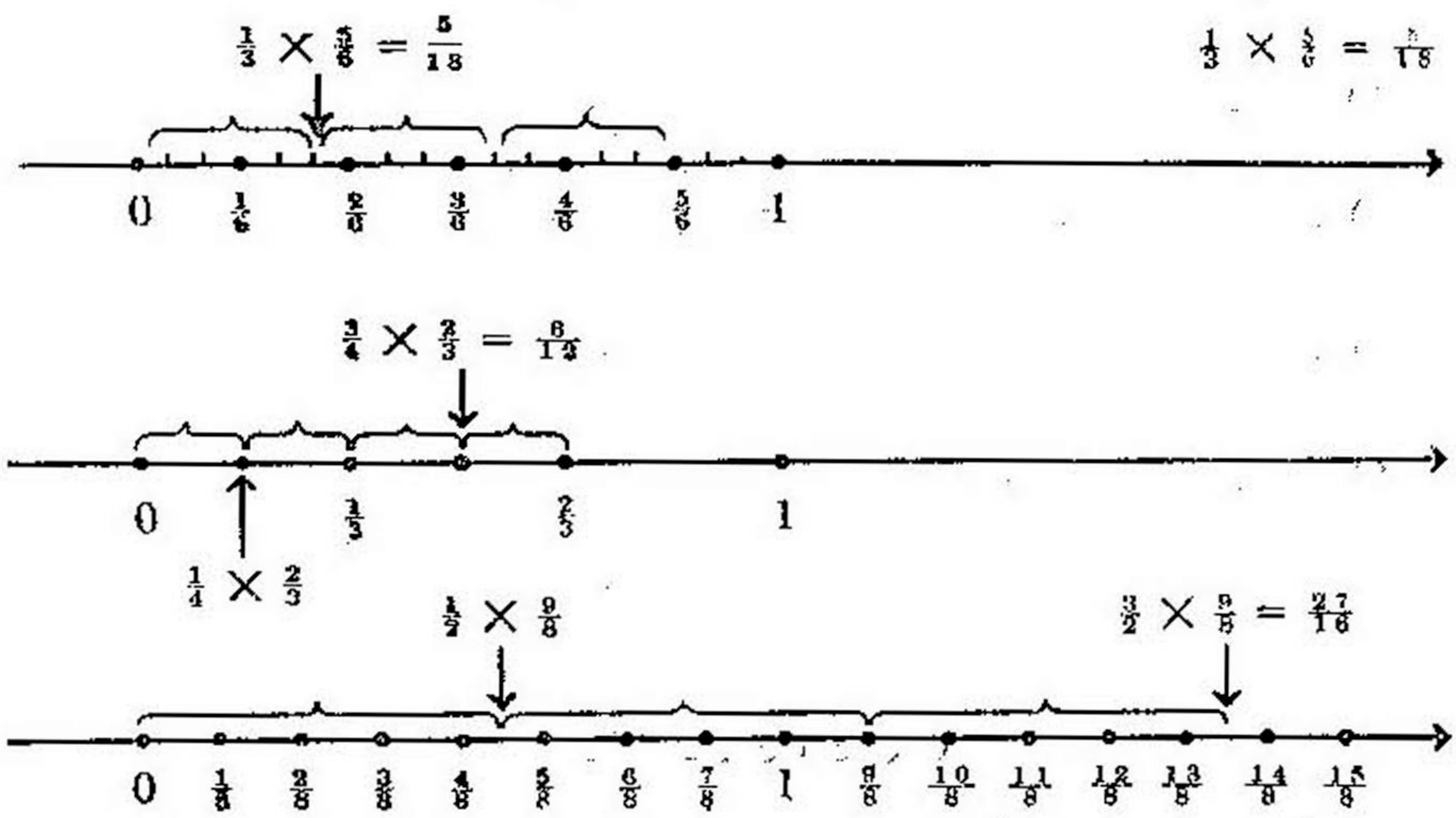
a)



b)



4.



Grupo de ejercicios 7

1. *a*) $\frac{6}{5}$ *b*) $\frac{13}{7}$ *c*) $\frac{1}{4}$ *d*) 1 *e*) $\frac{3}{5}$ *f*) $\frac{3}{8}$

2. *a*) $\frac{6}{5}$ *b*) $\frac{3}{7}$ *c*) $\frac{5}{4}$ *d*) 1 *e*) $\frac{1}{6}$ *f*) $\frac{2}{5}$

3. *a*) $n \times 3 = 36$
   b) $8 \times n = 24$
   c) $n \times 17 = 17$
   d) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = n$
   e) $11 \times n = 1$
   f) $2 \times 3 = n$

4. *a*) $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ $1 \div \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$
   b) $1 \div \frac{3}{16} = \frac{16}{3}$ $1 \div \frac{16}{3} = \frac{3}{16}$
   c) $1 \div \frac{18}{7} = \frac{7}{18}$ $1 \div \frac{7}{18} = \frac{18}{7}$
   d) $1 \div \frac{9}{41} = \frac{41}{9}$ $1 \div \frac{41}{9} = \frac{9}{41}$

5. *a*) $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$
   b) $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$
   c) $1 \times n = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$
   d) $n = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

6. *a*) $n \times \frac{3}{7} = \frac{5}{4}$

b) $n \times 1 = n \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{3}\right)$

c) $\left(n \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{7}{3}$

d) $n \times 1 = \frac{5}{4} \times \frac{7}{3}$

e) $n = \frac{35}{12}$

f) $\frac{5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{35}{12}$

7. *a*) $n \times \frac{16}{15} = \frac{8}{5}$

b) $\left(n \times \frac{16}{15}\right) \times \frac{15}{16} = \frac{8}{5} \times \frac{15}{16}$

c) $n \times 1 = \frac{8}{5} \times \frac{15}{16}$

d) $n = \frac{8}{5} + \frac{15}{16}$

e) $n = \frac{120}{80}$ ó $\frac{3}{2}$

f) $\frac{8}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{16}{15}$

Grupo de ejercicios 8

1. *a*) $\frac{15}{7} \times \frac{3}{2} = \left(n \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{2}$

b) $\frac{15}{7} \times \frac{3}{2} = n \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right)$

c) $\frac{15}{7} \times \frac{3}{2} = n \times 1$

d) $\frac{15}{7} \times \frac{3}{2} = n$

e) $\frac{15}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{7} \div \frac{2}{3}$

2. *a*) $15 \div 8 = \frac{15}{1} \div \frac{8}{1}$

$= \frac{15}{1} \times \frac{1}{8}$

$= \frac{15 \times 1}{1 \times 8}$

$= \frac{15}{8}$

b) $3 \div 10 = \frac{3}{1} \div \frac{10}{1}$

$= \frac{3}{1} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{3 \times 1}{1 \times 10}$

$= \frac{3}{10}$

c) $2586 \div 450 = \frac{2586}{1} \div \frac{450}{1}$

$= \frac{2586}{1} \times \frac{1}{450}$

$= \frac{2586 \times 1}{1 \times 450}$

$= \frac{2586}{450}$

d) $2 \div 3 = \frac{2}{1} \div \frac{3}{1}$

$= \frac{2}{1} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2 \times 1}{1 \times 3}$

$= \frac{2}{3}$

3. *a*) cero, recíproco *b*) recíproco, uno *c*) recíproco, uno

4. *a*) $\frac{21}{40} \div \frac{13}{60} = \frac{21}{40} \times \frac{60}{13}$

$$= \frac{21 \times 60}{40 \times 13}$$

$$= \frac{21 \times 3 \times 20}{2 \times 20 \times 13}$$

$$= \frac{21 \times 3}{2 \times 13}$$

$$= \frac{63}{26}$$

b) $\dfrac{\frac{21}{40}}{\frac{13}{60}} = \dfrac{\frac{120}{1} \times \frac{21}{40}}{\frac{120}{1} \times \frac{13}{60}}$

$$= \dfrac{\frac{120 \times 21}{1 \times 40}}{\frac{120 \times 13}{1 \times 60}}$$

$$= \dfrac{\frac{3 \times 40 \times 21}{1 \times 40}}{\frac{2 \times 60 \times 13}{1 \times 60}}$$

$$= \frac{3 \times 21}{2 \times 13}$$

$$= \frac{63}{26}$$

Esta obra terminó de imprimirse el día 29 de febrero de 1968, en los talleres de *Programex Editora, S. A.*, calle Mesones número 62, letra E, México 1, D. F.
Se tiraron 6 000 ejemplares.

su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.
Los títulos de los cuadernos de esta colección son: 1. Conjuntos. 2. Números enteros. 3. Sistemas de numeración para los números enteros. 4. Algoritmos de las operaciones con números enteros. 5. Números y sus factores. 6. Números racionales. 7. Sistemas de numeración para los números racionales y 8. Proposiciones numéricas.

EJEMPLAR Nº